

गणित

गाइड

कक्षा

9

प्रश्नावली 1.1

1. निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सत्य है या असत्य? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

- प्रत्येक पूर्ण संख्या एक प्राकृतिक संख्या है।
- शून्य न तो ऋणात्मक और न ही धनात्मक पूर्णांक है।
- किन्हीं दो परिमेय संख्याओं के बीच अनेक परिमेय संख्या होती हैं।

हल (i) असत्य है, क्योंकि शून्य एक पूर्ण संख्या है परन्तु प्राकृतिक संख्या नहीं है।

(ii) सत्य है, क्योंकि शून्य में कोई परिमाण नहीं होता है।

(iii) सत्य है, क्योंकि किन्हीं दो दी हुई परिमेय संख्याओं के बीच अपरिमित रूप से अनेक परिमेय संख्याएँ होती हैं।

2. निम्न संख्याओं के बीच परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

- 4 और 5 के बीच चार परिमेय संख्याएँ
- $\frac{2}{5}$ और $\frac{3}{4}$ के बीच पाँच परिमेय संख्याएँ
- 1 और 2 के बीच पाँच परिमेय संख्याएँ
- 2 और -3 के बीच तीन परिमेय संख्याएँ
- $-\frac{2}{5}$ और 2 के बीच तीन परिमेय संख्याएँ
- 0 और 0.5 के बीच आठ परिमेय संख्याएँ

हल (i) यहाँ, $5 > 4$ है, इसलिए माना $x = 4$, $y = 5$

तथा $n = 4$

$$\text{अब, } d = \frac{y-x}{n+1} = \frac{5-4}{4+1} = \frac{1}{5}$$

इसलिए 4 और 5 के बीच चार परिमेय संख्याएँ $(x+d)$, $(x+2d)$, $(x+3d)$ तथा $(x+4d)$ हैं।

$$\Rightarrow \left(4 + \frac{1}{5}\right), \left(4 + \frac{2}{5}\right), \left(4 + \frac{3}{5}\right), \left(4 + \frac{4}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{21}{5}, \frac{22}{5}, \frac{23}{5}, \frac{24}{5}$$

(ii) यहाँ $\frac{3}{4} > \frac{2}{5}$, इसलिए माना $x = \frac{2}{5}$, $y = \frac{3}{4}$ तथा $n = 5$

$$\text{अब, } d = \frac{y-x}{n+1} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{2}{5}}{5+1} = \frac{\frac{15-8}{20}}{6} = \frac{7}{120}$$

इसलिए, $\frac{2}{5}$ और $\frac{3}{4}$ के बीच पाँच परिमेय संख्याएँ $(x+d)$,

$(x+2d)$, $(x+3d)$, $(x+4d)$ तथा $(x+5d)$ हैं।

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{5} + \frac{7}{120}\right), \left(\frac{2}{5} + \frac{14}{120}\right), \left(\frac{2}{5} + \frac{21}{120}\right),$$

$$\left(\frac{2}{5} + \frac{28}{120}\right), \left(\frac{2}{5} + \frac{35}{120}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2 \times 24 + 7}{120}\right), \left(\frac{2 \times 24 + 14}{120}\right), \left(\frac{2 \times 24 + 21}{120}\right),$$

$$\left(\frac{2 \times 24 + 28}{120}\right), \left(\frac{2 \times 24 + 35}{120}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{48 + 7}{120}\right), \left(\frac{48 + 14}{120}\right), \left(\frac{48 + 21}{120}\right), \left(\frac{48 + 28}{120}\right),$$

$$\left(\frac{48 + 35}{120}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{55}{120}, \frac{62}{120}, \frac{69}{120}, \frac{76}{120}, \frac{83}{120}$$

$$\Rightarrow \frac{11}{24}, \frac{31}{60}, \frac{23}{40}, \frac{19}{30}, \frac{83}{120}$$

(iii) यहाँ, $2 > 1$, इसलिए माना $x = 1$, $y = 2$

तथा $n = 5$

$$\text{अब, } d = \frac{y-x}{n+1} = \frac{2-1}{5+1} = \frac{1}{6}$$

इसलिए, 1 और 2 के बीच पाँच परिमेय संख्याएँ $(x+d)$, $(x+2d)$, $(x+3d)$, $(x+4d)$ तथा $(x+5d)$ हैं।

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{6}\right), \left(1 + \frac{2}{6}\right), \left(1 + \frac{3}{6}\right), \left(1 + \frac{4}{6}\right) \text{ तथा } \left(1 + \frac{5}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{6+1}{6}\right), \left(\frac{6+2}{6}\right), \left(\frac{6+3}{6}\right), \left(\frac{6+4}{6}\right) \text{ तथा } \left(\frac{6+5}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{7}{6}, \frac{8}{6}, \frac{9}{6}, \frac{10}{6} \text{ तथा } \frac{11}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3} \text{ तथा } \frac{11}{6}$$

(iv) यहाँ, $-2 > -3$, इसलिए माना $x = -3$, $y = -2$ तथा $n = 3$

$$\text{अब, } d = \frac{y-x}{n+1} = \frac{-2 - (-3)}{3+1}$$

$$= \frac{-2+3}{4} = \frac{1}{4}$$

इसलिए -2 और -3 के बीच तीन परिमेय संख्याएँ $(x+d)$, $(x+2d)$, $(x+3d)$ हैं।

$$\Rightarrow \left(-3 + \frac{1}{4}\right), \left(-3 + \frac{2}{4}\right) \text{ तथा } \left(-3 + \frac{3}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-12+1}{4}\right), \left(\frac{-12+2}{4}\right) \text{ तथा } \left(\frac{-12+3}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{-11}{4}, \frac{-10}{4} \text{ तथा } \frac{-9}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{-11}{4}, -\frac{5}{2} \text{ तथा } \frac{-9}{4}$$

(v) यहाँ, $2 > \frac{-2}{5}$, इसलिए माना $x = -\frac{2}{5}$, $y = 2$ तथा $n = 3$

$$\text{अब, } d = \frac{y-x}{n+1} = \frac{2 - \left(-\frac{2}{5}\right)}{3+1} = \frac{2 + \frac{2}{5}}{4}$$

$$= \frac{(10+2)}{4} = \frac{12}{4} = \frac{3}{1}$$

इसलिए, $-\frac{2}{5}$ और 2 के बीच तीन परिमेय संख्याएँ $(x+d)$,

$(x+2d)$ तथा $(x+3d)$

$$\Rightarrow \left(-\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right), \left(-\frac{2}{5} + \frac{6}{5}\right) \text{ तथा } \left(-\frac{2}{5} + \frac{9}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}, \frac{4}{5} \text{ तथा } \frac{7}{5}$$

(vi) यहाँ, $0.5 > 0$, इसलिए माना $x = 0$, $y = 0.5$ तथा $n = 8$

$$\text{अब, } d = \frac{y-x}{n+1} = \frac{0.5-0}{8+1} = \frac{0.5}{9} = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$$

इसलिए, 0 और 0.5 के बीच आठ परिमेय संख्याएँ $(x+d)$, $(x+2d)$, $(x+3d)$, $(x+4d)$, $(x+5d)$, $(x+6d)$, $(x+7d)$ तथा $(x+8d)$ हैं।

$$\Rightarrow \left(0 + \frac{1}{18}\right), \left(0 + \frac{2}{18}\right), \left(0 + \frac{3}{18}\right), \left(0 + \frac{4}{18}\right),$$

$$\left(0 + \frac{5}{18}\right), \left(0 + \frac{6}{18}\right), \left(0 + \frac{7}{18}\right) \text{ तथा } \left(0 + \frac{8}{18}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{18}, \frac{2}{18}, \frac{3}{18}, \frac{4}{18}, \frac{5}{18}, \frac{6}{18}, \frac{7}{18} \text{ तथा } \frac{8}{18}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{18}, \frac{1}{9}, \frac{1}{6}, \frac{2}{9}, \frac{5}{18}, \frac{1}{3}, \frac{7}{18} \text{ तथा } \frac{4}{9}$$

3. निम्न संख्याओं के बीच परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

(i) 8 और 9

(ii) $\frac{1}{9}$ और $\frac{2}{9}$

(iii) -3 और -4

(iv) 0.75 और 1.2

हल p और q के बीच एक परिमेय संख्या ज्ञात करने के लिए, p और q को जोड़कर 2 से भाग करते हैं अर्थात् $\frac{p+q}{2}$

(i) 8 और 9 के बीच परिमेय संख्या

$$= \frac{8+9}{2} = \frac{17}{2}$$

(ii) $\frac{1}{9}$ और $\frac{2}{9}$ के बीच परिमेय संख्या

$$= \frac{\frac{1}{9} + \frac{2}{9}}{2} = \frac{\frac{3}{9}}{2} = \frac{\frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{6}$$

(iii) -3 और -4 के बीच परिमेय संख्या

$$= \frac{-3-4}{2} = \frac{-7}{2}$$

(iv) 0.75 और 1.2 के बीच परिमेय संख्या

$$= \frac{0.75+1.2}{2} = \frac{1.95}{2} = \frac{195}{200} = \frac{39}{40}$$

4. निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

(i) प्रत्येक वास्तविक संख्या या तो अपरिमेय संख्या होती है या परिमेय संख्या।

(ii) $\sqrt{7}$ एक अपरिमेय संख्या है परन्तु वास्तविक संख्या नहीं है।

(iii) 4 एक वास्तविक संख्या है परन्तु अपरिमेय संख्या नहीं है।

हल (i) सत्य है, क्योंकि प्रत्येक वास्तविक संख्या या तो परिमेय या अपरिमेय संख्या हो सकती है अर्थात् सभी परिमेय संख्याओं तथा अपरिमेय संख्याओं को एकसाथ लेकर बनने वाले संग्रह को वास्तविक संख्याओं का संग्रह कहते हैं।

(ii) असत्य है, क्योंकि $\sqrt{7}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त नहीं किया जा

सकता, जहाँ p तथा q पूर्णांक और $q \neq 0$ है अतः $\sqrt{7}$ एक अपरिमेय संख्या है तथा हम जानते हैं कि प्रत्येक अपरिमेय संख्या एक वास्तविक संख्या होती है।

(iii) असत्य, क्योंकि प्रत्येक अपरिमेय संख्या एक वास्तविक संख्या होती है।

5. निम्न संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए

(i) $\sqrt{5}$ (ii) $\sqrt{17}$ (iii) $\sqrt{10}$ (iv) $\sqrt{3}$

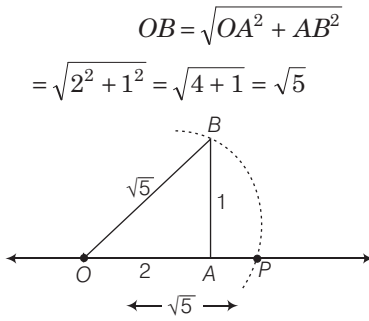
हल (i) सर्वप्रथम, दी गई संख्या को प्राकृतिक संख्या के वर्गों के योगफल के रूप में लिखते हैं।

$$\text{अतः } 5 = 4 + 1 = (2)^2 + (1)^2$$

इसलिए, $a = 2$ तथा $b = 1$

अब, संख्या रेखा पर $OA = 2$ इकाई तथा $AB = 1$ इकाई इस प्रकार खींचिए कि $AB \perp OA$ तथा OB को मिलाएँ।

पाइथागोरस प्रमेय से,



यहाँ, बिन्दु O को केन्द्र तथा OB माप की समान त्रिज्या लेकर बिन्दु B से एक चाप लगाया, जोकि संख्या रेखा को बिन्दु P पर काटता है। अतः OP माप, $\sqrt{5}$ को निरूपित करती है।

- (ii) सर्वप्रथम, 17 को प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों के योगफल अर्थात् $16 + 1$ अथवा $4^2 + 1^2$ के रूप में लिखते हैं।

$$\therefore a = 4, b = 1$$

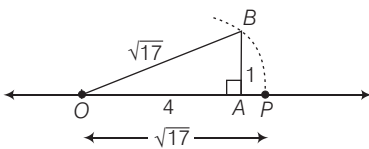
अब संख्या रेखा पर $OA = 4$ इकाई तथा $AB = 1$ इकाई इस प्रकार खींचते हैं कि $AB \perp OA$ तथा OB को मिलाइए।

पुनः पाइथागोरस प्रमेय से,

$$OB = \sqrt{OA^2 + AB^2} = \sqrt{4^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$$

यहाँ, बिन्दु O को केन्द्र तथा OB माप की समान त्रिज्या लेकर बिन्दु B से एक चाप लगाया जोकि संख्या रेखा को बिन्दु P पर काटता है।



अतः OP माप $\sqrt{17}$ को निरूपित करता है।

- (iii) सर्वप्रथम, 10 को प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों के योगफल अर्थात् $9 + 1$ अथवा $3^2 + 1^2$ के रूप में लिखते हैं।

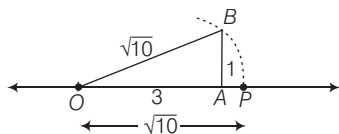
$$\therefore a = 3, b = 1$$

अब संख्या रेखा पर $OA = 3$ इकाई तथा $AB = 1$ इकाई इस प्रकार खींचते हैं कि $AB \perp OA$, OB को मिलाइए।

पाइथागोरस प्रमेय से,

$$OB = \sqrt{OA^2 + AB^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

यहाँ, बिन्दु O को केन्द्र तथा OB दूरी को त्रिज्या मानकर बिन्दु B से एक चाप लगाया जोकि संख्या रेखा को बिन्दु P पर काटता है।



अतः OP माप $\sqrt{10}$ को निरूपित करता है।

- (iv) उदाहरण 4 देखें।

प्रश्नावली 1.2

1. नीचे दिए गए कथन सत्य हैं या असत्य। कारण सहित उत्तर की पुष्टि कीजिए।

- (i) प्रत्येक वास्तविक संख्या को संख्या रेखा पर निरूपित कर सकते हैं।
(ii) प्रत्येक वास्तविक संख्या एक अपरिमेय संख्या है।

हल (i) सत्य है, क्योंकि संख्या रेखा पर प्रत्येक बिन्दु एक अद्वितीय वास्तविक संख्या द्वारा निरूपित होता है।

- (ii) असत्य है, क्योंकि परिमेय तथा अपरिमेय दोनों प्रकार की संख्याओं के संग्रह को वास्तविक संख्याएँ कहते हैं।

2. संख्या $\sqrt{5}$ का दशमलव प्रसार पुनरावृत्ति है, क्या यह सत्य है?

हल नहीं, क्योंकि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है अतः इसका दशमलव प्रसार अनवसानी अनावर्ती है।

3. निम्न संख्याओं को दशमलव रूप में लिखिए तथा बताइए दशमलव प्रसार किस रूप का है?

- (i) $\frac{56}{1000}$ (ii) $\frac{2}{11}$
(iii) $3\frac{6}{7}$ (iv) $\frac{4}{13}$

हल (i) दिया है, $\frac{56}{1000} = 0.056$

अतः यह प्रसार सांत दशमलव है।

- (ii) दिया है, $\frac{2}{11}$

संख्या 2 को 11 से विभाजित करने पर,

$$11 \overline{) 20} \text{ (0.1818}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 90 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 88 \\ 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 90 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 88 \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 90 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 88 \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 90 \end{array}$$

$$\therefore \frac{2}{11} = 0.\overline{18}$$

अतः यह प्रसार अनवसानी आवर्ती है।

- (iii) दिया है, $3\frac{6}{7} = \frac{27}{7}$, संख्या 27 को 7 से विभाजित करने पर,

$$7 \overline{) 27} \text{ (3.857142}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ 60 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ 60 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 56 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 40 \\ \underline{35} \\ 50 \\ \underline{49} \\ 10 \\ \underline{7} \\ 30 \\ \underline{28} \\ 20 \\ \underline{14} \\ 6 \end{array}$$

$$\therefore \frac{27}{7} = 3.\overline{857142}$$

अतः यह प्रसार अनवसानी आवर्ती है।

(iv) उदाहरण 1, भाग (ii) देखिए।

(v) दिया है, $\frac{13}{25}$, संख्या 13 को 25 से विभाजित करने पर,

$$\begin{array}{r} 25) 130(0.52 \\ \underline{125} \\ 50 \\ \underline{50} \\ 0 \end{array}$$

$$\therefore \frac{13}{25} = 0.52$$

अतः यह प्रसार सांत दशमलव है।

4. $\frac{3}{7}$ के दशमलव प्रसार में पुनरावृत्ति अंकों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $\frac{3}{7}$

3 को 7 से विभाजित करने पर,

$$\begin{array}{r} 7) 30(0.428571 \\ \underline{28} \\ 20 \\ \underline{14} \\ 60 \\ \underline{56} \\ 40 \\ \underline{35} \\ 50 \\ \underline{49} \\ 10 \\ \underline{7} \\ 3 \end{array}$$

$$\therefore \frac{3}{7} = 0.\overline{428571}$$

यहाँ, 3 को 7 से भाग देने पर, खण्ड 428571 की पुनरावृत्ति होती है अर्थात् दशमलव प्रसार में पुनरावृत्ति अंकों की संख्या 6 है।

5. निम्न संख्याओं को $\frac{P}{q}$ रूप में व्यक्त कीजिए जहाँ $q \neq 0$

(i) $0.\overline{4}$ (ii) $0.\overline{8}$

(iii) $0.\overline{68}$ (iv) $1.\overline{32}$

(v) $0.\overline{12}$ (vi) $18.\overline{48}$

(vii) $0.1\overline{7}$ (viii) $0.12\overline{3}$

हल (i) माना $x = 0.\overline{4} = 0.4444\dots$... (i)

समी (i) के दोनों पक्षों में 10 से गुणा करने पर,

$$10x = 4.444\dots \quad \dots (ii)$$

समी (ii) में से समी (i) को घटाने पर,

$$10x - x = (4.444\dots) - (0.4444\dots)$$

$$\Rightarrow 9x = 4$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{9}$$

(ii) माना $x = 0.\overline{8} = 0.8888\dots$... (i)

समी (i) के दोनों पक्षों में 10 से गुणा करने पर,

$$10x = 8.888\dots \quad \dots (ii)$$

समी (ii) में से समी (i) को घटाने पर,

$$10x - x = (8.888\dots) - (0.8888\dots)$$

$$\Rightarrow 9x = 8$$

$$\Rightarrow x = \frac{8}{9}$$

(iii) माना $x = 0.\overline{68} = 0.686868\dots$... (i)

यहाँ, दो अंकों की पुनरावृत्ति है इसलिए

समी (i) को 100 से गुणा करने पर,

$$100x = 68.6868\dots \quad \dots (ii)$$

समी (ii) में से समी (i) को घटाने पर,

$$100x - x = (68.6868\dots) - (0.686868\dots)$$

$$\Rightarrow 99x = 68$$

$$\Rightarrow x = \frac{68}{99}$$

(iv) माना $x = 1.\overline{32} = 1.32222\dots$... (i)

समी (i) के दोनों पक्षों को 10 से गुणा करने पर,

$$10x = 13.2222\dots \quad \dots (ii)$$

अब, समी (ii) के दोनों पक्षों को 10 से गुणा करने पर,

$$100x = 132.2222\dots \quad \dots (iii)$$

समी (iii) में से समी (ii) को घटाने पर,

$$100x - 10x = (132.2222...) - (13.2222 ...)$$

$$\Rightarrow 90x = 119$$

$$\Rightarrow x = \frac{119}{90}$$

(v) माना $x = 0.\overline{12} = 0.12121212 \dots$... (i)

समी (i) के दोनों पक्षों को 100 से गुणा करने पर,

$$100x = 12.12121212 \dots \dots (ii)$$

अब समी (ii) में से समी (i) को घटाने पर,

$$100x - x = (12.12121212 \dots) - (0.12121212 \dots)$$

$$\Rightarrow 99x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$$

(vi) माना $x = 18.\overline{48} = 18.48484848 \dots$... (i)

समी (i) के दोनों पक्षों को 100 से गुणा करने पर,

$$100x = 1848.484848 \dots \dots (ii)$$

समी (ii) में से समी (i) को घटाने पर,

$$100x - x = (1848.484848 \dots) - (18.484848 \dots)$$

$$\Rightarrow 99x = 1830$$

$$\Rightarrow x = \frac{1830}{99} = \frac{610}{33}$$

(vii) माना $x = 0.1\overline{7} = 0.177777 \dots$... (i)

समी (i) के दोनों पक्षों को 10 से गुणा करने पर,

$$10x = 1.777777 \dots \dots (ii)$$

पुनः समी (ii) के दोनों पक्षों को 10 से गुणा करने पर,

$$100x = 17.7777 \dots \dots (iii)$$

अब समी (iii) में से समी (ii) को घटाने पर,

$$100x - 10x = (17.7777 \dots) - (1.7777 \dots)$$

$$\Rightarrow 90x = 16$$

$$\Rightarrow x = \frac{16}{90} = \frac{8}{45}$$

(viii) माना $x = 0.12\overline{3} = 0.1233333 \dots$... (i)

समी (i) के दोनों पक्षों को 100 से गुणा करने पर,

$$100x = 12.3333 \dots \dots (ii)$$

पुनः समी (ii) के दोनों पक्षों को 10 से गुणा करने पर,

$$1000x = 123.3333 \dots \dots (iii)$$

समी (iii) में से समी (ii) को घटाने पर,

$$1000x - 100x = (123.3333 \dots) - (12.3333 \dots)$$

$$\Rightarrow 900x = 111 \Rightarrow x = \frac{111}{900}$$

6. निम्न ज्ञात कीजिए

(i) $\frac{2}{3}$ और $\frac{8}{9}$ के बीच दो अपरिमेय संख्या

(ii) $\frac{1}{9}$ और $\frac{1}{7}$ के बीच अपरिमेय संख्या

(iii) $\sqrt{3}$ और $\sqrt{5}$ के बीच तीन अपरिमेय संख्या

हल (i) दिया है, $\frac{2}{3} = 0.66666 \dots$

तथा $\frac{8}{9} = 0.88888 \dots$

अपरिमेय संख्याओं का प्रसार अनवसानी अनावर्ती होता है इसलिए, $\frac{2}{3}$ और $\frac{8}{9}$ के बीच दो अपरिमेय संख्या 0.686886886

... तथा 0.7070070007...

(ii) दिया है, $\frac{1}{9} = 0.1111111 \dots$

तथा $\frac{1}{7} = 0.142857142 \dots$

∴ अपरिमेय संख्याओं का प्रसार अनवसानी अनावर्ती होता है इसलिए $\frac{1}{9}$ और $\frac{1}{7}$ के बीच एक अपरिमेय संख्या 0.1303003000 ...

(iii) दिया है, $\sqrt{3} = 1.73205080 \dots$

तथा $\sqrt{5} = 2.236067977 \dots$

∴ अपरिमेय संख्याओं का प्रसार अनवसानी अनावर्ती होता है इसलिए $\sqrt{3}$ और $\sqrt{5}$ के बीच तीन अपरिमेय संख्या 1.8010010001 ..., 1.9010010001..., तथा 2.010010001 ...

7. निम्नलिखित संख्याओं में से परिमेय या अपरिमेय संख्या को सत्यापन के साथ वर्गीकृत कीजिए।

(i) 0.5918

(ii) 1.010010001...

हल (i) 0.5918

दिया गया प्रसार सांत दशमलव है। अतः एक परिमेय संख्या है।

(ii) 1.010010001 ...

दिया गया दशमलव प्रसार अनवसानी अनावर्ती है। अतः एक अपरिमेय संख्या है।

प्रश्नावली 1.3

1. कारण सहित बताइए नीचे दी गई संख्याओं में कौन-कौन-सी संख्या परिमेय है और कौन-सी अपरिमेय?

(i) $7 + 2\sqrt{3}$

(ii) $(4 + \sqrt{32}) + \sqrt{64} - 4\sqrt{2}$

हल (i) $7 + 2\sqrt{3}$

यहाँ, 7 एक परिमेय संख्या तथा $2\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है चूँकि एक परिमेय संख्या तथा अपरिमेय संख्या का योग एक अपरिमेय संख्या होता है, अतः $7 + 2\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है।

(ii) $(4 + \sqrt{32}) + \sqrt{64} - 4\sqrt{2}$

यहाँ, $\sqrt{32} = \sqrt{4 \times 4 \times 2} = 4\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \sqrt{64} = \sqrt{8 \times 8} = 8$$

सरल करने पर, हमें प्राप्त है

$$4 + 4\sqrt{2} + 8 - 4\sqrt{2}$$

= 12 जोकि एक परिमेय संख्या है

2. यदि a तथा b प्राकृतिक संख्याएँ हैं, तब $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ एक परिमेय है क्या यह सत्य है?

हल दिया है, a तथा b प्राकृतिक संख्याएँ हैं।

$$\therefore (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2$$

$$= a - b$$

चूँकि a तथा b परिमेय संख्या हैं, अतः $a - b$ एक परिमेय संख्या है।

3. सरल कीजिए,

(i) $\sqrt{72} + \sqrt{800} - \sqrt{18}$

(ii) $3\sqrt{45} - \sqrt{125} + \sqrt{200} - \sqrt{50}$

हल (i) दिया है, $\sqrt{72} + \sqrt{800} - \sqrt{18}$

$$= \sqrt{6 \times 6 \times 2} + \sqrt{20 \times 20 \times 2} - \sqrt{3 \times 3 \times 2}$$

$$= 6\sqrt{2} + 20\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$$

$$= 26\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$$

$$= 23\sqrt{2}$$

(ii) दिया है, $3\sqrt{45} - \sqrt{125} + \sqrt{200} - \sqrt{50}$

$$= 3\sqrt{3 \times 3 \times 5} - \sqrt{5 \times 5 \times 5}$$

$$+ \sqrt{10 \times 10 \times 2} - \sqrt{5 \times 5 \times 2}$$

$$= 3 \times 3\sqrt{5} - 5\sqrt{5} + 10\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$$

$$= 9\sqrt{5} - 5\sqrt{5} + 5\sqrt{2}$$

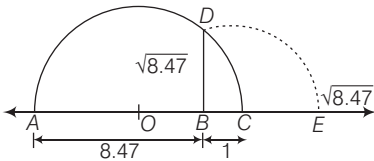
$$= 4\sqrt{5} + 5\sqrt{2}$$

4. ज्यामितीय विधि से, संख्या रेखा पर प्रदर्शित कीजिए

(i) $\sqrt{8.47}$ (ii) $\sqrt{3.7}$

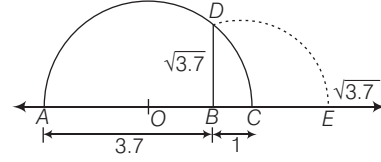
(iii) $\sqrt{10.5}$ (iv) $\sqrt{3.85}$

हल (i) सर्वप्रथम, एक रेखाखण्ड $AB = 8.47$ इकाई खींचा तथा इसे बिन्दु 'C' तक इस प्रकार बढ़ाया कि $BC = 1$ इकाई। माना 'O', AC का मध्य-बिन्दु है। अब, 'O' को केन्द्र तथा OC त्रिज्या लेकर एक अर्द्धवृत्त खींचा। इसके पश्चात् बिन्दु B से AC पर एक लम्ब BD खींचा जोकि अर्द्धवृत्त को बिन्दु 'D' पर काटता है।



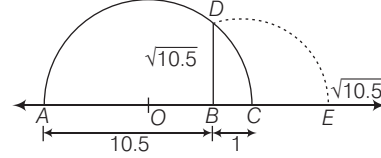
अतः BD दूरी $\sqrt{8.47} \approx 2.91$ को ज्यामितीय रूप से निरूपित करती है। अब, BC को संख्या रेखा मानकर, केन्द्र B तथा त्रिज्या BD लेकर एक चाप काटा जो AC को बढ़ाने पर बिन्दु 'E' पर मिलता है। अतः संख्या रेखा पर बिन्दु 'E' $\sqrt{8.47}$ को निरूपित करता है।

(ii) सर्वप्रथम, एक रेखाखण्ड $AB = 3.7$ इकाई खींचा तथा इसे बिन्दु 'C' तक इस प्रकार बढ़ाया कि $BC = 1$ इकाई। माना 'O', AC का मध्य-बिन्दु है। अब, 'O' को केन्द्र तथा OC त्रिज्या लेकर एक अर्द्धवृत्त खींचा। इसके पश्चात् बिन्दु B से AC पर एक लम्ब, BD खींचा जोकि अर्द्धवृत्त को बिन्दु 'D' पर काटता है।



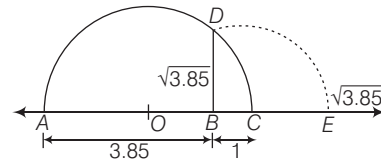
अतः BD दूरी $\sqrt{3.7} \approx 1.92$ को ज्यामितीय रूप से निरूपित करती है। अब, BC को संख्या रेखा मानकर, केन्द्र B तथा त्रिज्या BD लेकर एक चाप काटा जो AC को बढ़ाने पर बिन्दु 'E' पर मिलता है। अतः संख्या रेखा पर बिन्दु 'E' $\sqrt{3.7}$ को निरूपित करता है।

(iii) सर्वप्रथम, एक रेखाखण्ड $AB = 10.5$ इकाई खींचा तथा इसे बिन्दु 'C' तक इस प्रकार बढ़ाया कि $BC = 1$ इकाई। माना 'O', AC का मध्य-बिन्दु है। अब, 'O' को केन्द्र तथा OC त्रिज्या लेकर एक अर्द्धवृत्त खींचा। इसके पश्चात् बिन्दु B से AC पर एक लम्ब BD खींचा जोकि अर्द्धवृत्त को बिन्दु 'D' पर काटता है।



अतः BD दूरी $\sqrt{10.5} \approx 3.24$ को ज्यामितीय रूप से निरूपित करती है। अब, BC को संख्या रेखा मानकर, केन्द्र B तथा त्रिज्या BD लेकर एक चाप काटा जो AC को बढ़ाने पर बिन्दु 'E' पर मिलता है। अतः संख्या रेखा पर बिन्दु 'E' $\sqrt{10.5}$ निरूपित करता है।

(iv) सर्वप्रथम, एक रेखाखण्ड $AB = 3.85$ इकाई खींचा तथा इसे बिन्दु 'C' तक इस प्रकार बढ़ाया कि $BC = 1$ इकाई। माना 'O', AC का मध्य-बिन्दु है। अब, 'O' को केन्द्र तथा OC त्रिज्या लेकर एक अर्द्धवृत्त खींचा। इसके पश्चात् बिन्दु B से AC पर एक लम्ब BD खींचा जोकि अर्द्धवृत्त को बिन्दु 'D' पर काटता है।



अतः BD दूरी $\sqrt{3.85} \approx 1.96$ को ज्यामितीय रूप से निरूपित करती है। अब, BC को संख्या रेखा मानकर, केन्द्र B तथा त्रिज्या BD लेकर एक चाप काटा जो AC को बढ़ाने पर बिन्दु 'E' पर मिलता है। अतः संख्या रेखा पर बिन्दु 'E' $\sqrt{3.85}$ को निरूपित करता है।

5. निम्नलिखित को सरल कीजिए

(i) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$ (ii) $(\sqrt{5} + \sqrt{7})(\sqrt{5} - \sqrt{11})$

(iii) $\left(\sqrt{\frac{2}{5}} + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

(iv) $(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$

$$\begin{aligned} \text{हल (i)} \quad (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 &= (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 \\ &= 3 - 2\sqrt{6} + 2 \quad [\because (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2] \\ &= 5 - 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad (\sqrt{5} + \sqrt{7})(\sqrt{5} - \sqrt{11}) \\ &= \sqrt{5} \times \sqrt{5} - \sqrt{5} \times \sqrt{11} + \sqrt{7} \times \sqrt{5} - \sqrt{7} \times \sqrt{11} \\ &= 5 - \sqrt{5 \times 11} + \sqrt{7 \times 5} - \sqrt{7 \times 11} \\ &= 5 - \sqrt{55} + \sqrt{35} - \sqrt{77} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad \left(\sqrt{\frac{2}{5}} + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \\ &= \sqrt{\frac{2}{5}} \times \sqrt{2} + \sqrt{\frac{2}{5}} \times \sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{2}} \times \sqrt{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} \times \sqrt{3} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \times \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \times \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \sqrt{3} \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} + \sqrt{3} + \frac{3}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(iv)} \quad (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 &= (\sqrt{5})^2 - 2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 \\ &= 5 - 2\sqrt{15} + 3 \\ &= 8 - 2\sqrt{15} \quad [\because (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2] \end{aligned}$$

6. निम्न का हर का परिमेयीकरण कीजिए।

$$\text{(i)} \quad \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{4}} \quad \text{(ii)} \quad \frac{5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}}{5\sqrt{3} - 3\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned} \text{हल (i)} \quad \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{4}} &= \frac{1}{\sqrt{5} - 2} \times \frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} + 2} \\ &= \frac{\sqrt{5} + 2}{(\sqrt{5})^2 - (2)^2} = \frac{\sqrt{5} + 2}{5 - 4} \end{aligned}$$

[परिमेयीकरण करने पर]

$$= \frac{\sqrt{5} + 2}{1} = \sqrt{5} + 2 = \sqrt{5} + \sqrt{4}$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}}{5\sqrt{3} - 3\sqrt{5}} \times \frac{5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}}{5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}} \quad [\text{परिमेयीकरण करने पर}]$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(5\sqrt{3} + 3\sqrt{5})^2}{(5\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{5})^2} \\ &= \frac{(5\sqrt{3})^2 + 2 \times 5\sqrt{3} \times 3\sqrt{5} + (3\sqrt{5})^2}{25 \times 3 - 9 \times 5} \\ &= \frac{25 \times 3 + 30 \times \sqrt{15} + 9 \times 5}{75 - 45} = \frac{75 + 30\sqrt{15} + 45}{30} \end{aligned}$$

$$= \frac{120 + 30\sqrt{15}}{30} = 4 + \sqrt{15}$$

7. यदि $\sqrt{3} = 1.732$ तथा $\sqrt{5} = 2.236$ हो, तब $\frac{8}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$ का मान

ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $\sqrt{3} = 1.732$ तथा $\sqrt{5} = 2.236$

$$\begin{aligned} \text{तब,} \quad \frac{8}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} &= \frac{8(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} \\ &= \frac{8(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{8(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{5 - 3} \end{aligned}$$

[परिमेयीकरण करने पर]

$$= \frac{8(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{2} = \frac{8(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{2}$$

$$= \frac{8(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{2} = 4(2.236 - 1.732)$$

$$= 4 \times 0.504 = 2.02$$

8. यदि $x = 1 - \sqrt{2}$, तब $\left(x - \frac{1}{x}\right)^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $x = 1 - \sqrt{2}$

$$\text{तब,} \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{1 - \sqrt{2}} \times \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \quad [\text{परिमेयीकरण करने पर}]$$

$$= \frac{1 + \sqrt{2}}{(1)^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{1 + \sqrt{2}}{1 - 2} = -(1 + \sqrt{2})$$

$$\begin{aligned} \text{अब,} \quad x - \frac{1}{x} &= (1 - \sqrt{2}) - \{-(1 + \sqrt{2})\} \\ &= 1 - \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} = 2 \end{aligned}$$

$$\therefore \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 = (2)^3 = 8$$

9. a तथा b के मान ज्ञात कीजिए।

$$\text{(i)} \quad \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = a + b\sqrt{3} \quad \text{(ii)} \quad \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = a + \sqrt{15}b$$

$$\begin{aligned} \text{हल (i)} \quad \text{दिया है,} \quad a + b\sqrt{3} &= \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \\ &= \frac{(2 + \sqrt{3})^2}{(2)^2 - (\sqrt{3})^2} \end{aligned}$$

[परिमेयीकरण करने पर]

$$\Rightarrow a + b\sqrt{3} = \frac{(2 + \sqrt{3})^2}{(2)^2 - (\sqrt{3})^2}$$

$$\Rightarrow a + b\sqrt{3} = \frac{4 + 3 + 2 \times 2 \times \sqrt{3}}{4 - 3}$$

$$\Rightarrow a + b\sqrt{3} = \frac{7 + 4\sqrt{3}}{1}$$

$$\Rightarrow a + b\sqrt{3} = 7 + 4\sqrt{3}$$

दोनों पक्षों की तुलना करने पर, $a = 7$ तथा $b = 4$

$$\text{(ii)} \quad \text{दिया है,} \quad a + \sqrt{15}b = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$$

[परिमेयीकरण करने पर]

$$\Rightarrow a + \sqrt{15}b = \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2}$$

$$\Rightarrow a + \sqrt{15}b = \frac{5 + 3 + 2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{3}}{5 - 3}$$

$$[\because (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab]$$

$$\Rightarrow a + \sqrt{15}b = \frac{8 + 2\sqrt{15}}{2}$$

$$\Rightarrow a + \sqrt{15}b = 4 + \sqrt{15}$$

दोनों पक्षों की तुलना करने पर, $a = 4$ तथा $b = 1$

10. सरल कीजिए

$$\frac{1}{2 + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{8}}$$

हल

$$\frac{1}{2 + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{8}}$$

$$= \frac{1}{2 + \sqrt{5}} \times \frac{2 - \sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{5} - \sqrt{6}}{\sqrt{5} - \sqrt{6}}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{6} - \sqrt{7}}{\sqrt{6} - \sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{8}} \times \frac{\sqrt{7} - \sqrt{8}}{\sqrt{7} - \sqrt{8}}$$

[प्रत्येक पद का परिमेयीकरण करने पर]

$$= \frac{2 - \sqrt{5}}{(2)^2 - (\sqrt{5})^2} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{6}}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{6})^2} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{7}}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{7})^2}$$

$$+ \frac{\sqrt{7} - \sqrt{8}}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{8})^2}$$

$$= \frac{2 - \sqrt{5}}{4 - 5} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{6}}{5 - 6} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{7}}{6 - 7} + \frac{\sqrt{7} - \sqrt{8}}{7 - 8}$$

$$= \frac{2 - \sqrt{5}}{-1} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{6}}{-1} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{7}}{-1} + \frac{\sqrt{7} - \sqrt{8}}{-1}$$

$$= -2 + \sqrt{5} - \sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{6} + \sqrt{7} - \sqrt{7} + \sqrt{8}$$

$$= -2 + \sqrt{8}$$

प्रश्नावली 1.4

1. निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{1/4}\right]^{-1/5}$ (ii) $\left(\frac{3125}{243}\right)^{-4/5}$

(iii) $\sqrt{3^{-2}}$ (iv) $(14641)^{0.25}$

(v) $\frac{4}{(125)^{-2/3}} - \frac{1}{(16)^{-3/4}}$

(vi) $[9(64^{1/3} + 125^{1/3})^3]^{1/4}$

हल

(i) $\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{1/4}\right]^{-1/5} = \left(\frac{3}{5}\right)^{1/4 \times (-1/5)} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-1/20}$ $[\because (a^p)^q = a^{pq}]$

$$= \left(\frac{5}{3}\right)^{1/20}$$

$[\because \left(\frac{a}{b}\right)^{-p} = \left(\frac{b}{a}\right)^p]$

(ii) $\left(\frac{3125}{243}\right)^{-4/5} = \left(\frac{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}\right)^{-4/5}$

$$= \left(\frac{5^5}{3^5}\right)^{-4/5} = \left\{\left(\frac{5}{3}\right)^5\right\}^{-4/5}$$

$$= \left\{\left(\frac{5}{3}\right)^{5 \times \frac{1}{5}}\right\}^{-4}$$

$[\because (a^m)^n = a^{mn}]$

$$= \left(\frac{5}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{81}{625}$$

(iii) $\sqrt{3^{-2}} = (3^{-2})^{1/2} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$ $[\because (a^p)^q = a^{pq}]$

(iv) $(14641)^{0.25} = (14641)^{25/100} = (14641)^{1/4}$

$$= (11 \times 11 \times 11 \times 11)^{1/4} = (11^4)^{1/4}$$

$$= 11^{(4 \times \frac{1}{4})} = 11$$

$[\because (a^p)^q = a^{pq}]$

(v) $\frac{4}{(125)^{-2/3}} - \frac{1}{(16)^{-3/4}} = \frac{4}{(5^3)^{-2/3}} - \frac{1}{(2^4)^{-3/4}}$

$$= \frac{4}{5^{3 \times (-2/3)}} - \frac{1}{2^{4 \times (-3/4)}}$$

$[\because (a^m)^n = a^{mn}]$

$$= \frac{4}{5^{-2}} - \frac{1}{2^{-3}} = 4 \times 5^2 - 2^3$$

$$= 4 \times 25 - 8 = 100 - 8 = 92$$

(vi) $\left[9\left(64^{1/3} + 125^{1/3}\right)^3\right]^{1/4} = [9((4^3)^{1/3} + (5^3)^{1/3})^3]^{1/4}$

$$= [9(4 + 5)^3]^{1/4} = [9(9)^3]^{1/4}$$

$$= (9^{1+3})^{1/4} = (9^4)^{1/4} = 9^{4 \times \frac{1}{4}} = 9$$

$[\because a^m \times a^n = a^{m+n}]$

2. यदि $81^x = \frac{9}{3^x}$ हो, तब x का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $81^x = \frac{9}{3^x} \Rightarrow (3^4)^x = \frac{9}{3^x}$

$$\Rightarrow 3^{4x} = \frac{9}{3^x} \Rightarrow 3^{4x} \times 3^x = 9$$

$$\Rightarrow 3^{4x+x} = 9 \Rightarrow 3^{5x} = 9$$

$$\Rightarrow 3^{5x} = 3^2 \Rightarrow 5x = 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{5}$$

3. यदि $z = 0.0064$ हो, तब $\left(\frac{1}{z}\right)^{1/2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $z = 0.0064$

$$\Rightarrow z = (0.08)^2$$

$$\therefore \left(\frac{1}{z}\right)^{1/2} = \left\{\frac{1}{(0.08)^2}\right\}^{1/2}$$

$$= \frac{1}{\{(0.08)^2\}^{1/2}} \quad [\because (a^m)^n = a^{mn}]$$

$$= \frac{1}{0.08} = \frac{100}{8} = 12.5$$

4. सिद्ध कीजिए $\frac{a^{-1}}{a^{-1} + b^{-1}} + \frac{a^{-1}}{a^{-1} - b^{-1}} = \frac{2b^2}{b^2 - a^2}$

हल बायाँ पक्ष = $\frac{a^{-1}}{a^{-1} + b^{-1}} + \frac{a^{-1}}{a^{-1} - b^{-1}} = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} + \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$

$$= \frac{\frac{1}{a}}{\frac{b+a}{ab}} + \frac{\frac{1}{a}}{\frac{b-a}{ab}} \quad [\text{ल. स. लेने पर}]$$

$$= \frac{1}{a} \times \frac{ab}{b+a} + \frac{1}{a} \times \frac{ab}{b-a}$$

$$= \frac{b}{b+a} + \frac{b}{b-a} = \frac{b(b-a) + b(b+a)}{(b+a)(b-a)}$$

$$= \frac{b^2 - ab + b^2 + ab}{b^2 - a^2} = \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \quad \text{इति सिद्धम्}$$

5. यदि $a^2 - b^2 = 1$ हो, तब $[(\mu)^{a-b}]^{\mu^{a+b}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $a^2 - b^2 = 1$

$$\therefore [(\mu)^{a-b}]^{\mu^{a+b}} = (\mu)^{(a-b)(a+b)}$$

$$= (\mu)^{a^2 - b^2} = (\mu)^1 \quad [\because a^2 - b^2 = 1]$$

$$= \mu$$

6. यदि $2^{9x} \div 2^{2x} = \sqrt[7]{2^{14}}$ हो, तब x का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $2^{9x} \div 2^{2x} = \sqrt[7]{2^{14}}$

$$\Rightarrow 2^{9x-2x} = (2^{14})^{\frac{1}{7}}$$

$$\left[\because a^m \div a^n = a^{m-n} \text{ तथा } \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \right]$$

$$\Rightarrow 2^{7x} = 2^2 \Rightarrow 7x = 2$$

[दोनों पक्षों के घातांकों की तुलना करने पर]

$$\Rightarrow x = \frac{2}{7}$$

7. यदि $a = 2$ तथा $b = 3$ हो, तब निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $(a^b + b^a)^{-1}$ (ii) $(a^a + b^b)^{-1}$

हल दिया है, $a = 2$ तथा $b = 3$

(i) $(a^b + b^a)^{-1} = (2^3 + 3^2)^{-1}$

$$= (8 + 9)^{-1} = (17)^{-1} = \frac{1}{17}$$

(ii) $(a^a + b^b)^{-1} = (2^2 + 3^3)^{-1}$

$$= (4 + 27)^{-1} = (31)^{-1} = \frac{1}{31}$$

8. सिद्ध कीजिए कि $\frac{2^{30} + 2^{29} + 2^{28}}{2^{31} + 2^{30} - 2^{29}} = \frac{7}{10}$

हल बायाँ पक्ष = $\frac{2^{30} + 2^{29} + 2^{28}}{2^{31} + 2^{30} - 2^{29}}$

$$= \frac{2^2 \times 2^{28} + 2 \times 2^{28} + 2^{28}}{2^2 \times 2^{29} + 2 \times 2^{29} - 2^{29}} = \frac{2^{28}(2^2 + 2 + 1)}{2^{29}(2^2 + 2 - 1)}$$

$$= \frac{2^{28}(4 + 2 + 1)}{2^{29}(4 + 2 - 1)} = \frac{2^{28} \times 7}{2^{29} \times 5}$$

$$= \frac{7}{2^{29-28} \times 5} \quad [a^m \div a^n = a^{m-n}]$$

$$= \frac{7}{2 \times 5} = \frac{7}{10} \quad \text{इति सिद्धम्}$$

9. $\sqrt[5]{\sqrt[4]{3^2}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\sqrt[5]{\sqrt[4]{3^2}} = \sqrt[5]{(3^2)^{\frac{1}{4}}}$ $[\because \sqrt[n]{a} = (a)^{1/n}]$

$$= \sqrt[5]{3^{\frac{1}{2}}} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}} = 3^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{5}} = 3^{\frac{1}{10}}$$

10. यदि $a = \frac{2^{x-1}}{2^{x-2}}$, $b = \frac{2^{-x}}{2^{x+1}}$ तथा $a - b = 0$ हो, तब x का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $a = \frac{2^{x-1}}{2^{x-2}}$, $b = \frac{2^{-x}}{2^{x+1}}$ तथा $a - b = 0$

$$\therefore \frac{2^{x-1}}{2^{x-2}} - \frac{2^{-x}}{2^{x+1}} = 0$$

$$\Rightarrow 2^{x-1-(x-2)} - 2^{-x-(x+1)} = 0 \quad [\because a^m \div a^n = a^{m-n}]$$

$$\Rightarrow 2^{x-1-x+2} - 2^{-x-x-1} = 0$$

$$\Rightarrow 2^1 - 2^{-2x-1} = 0 \Rightarrow 2^1 = 2^{-2x-1}$$

$$\Rightarrow -2x-1 = 1$$

[दोनों पक्षों की घातों की तुलना करने पर]

$$\Rightarrow -2x = 1 + 1 \Rightarrow -2x = 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{-2} \Rightarrow x = -1$$



प्रश्नावली 2.1

1. शून्य बहुपद की घात क्या होती है?

हल शून्य बहुपद को 0 से व्यक्त किया जाता है जिसकी घात परिभाषित नहीं है।

2. x के बहुपद में x की घात के लिए आवश्यक प्रतिबन्ध क्या है?

हल चर x के बहुपद के लिए प्रत्येक पद में x की घात ऋणेत्तर पूर्णांक अथवा पूर्ण संख्या होनी चाहिए।

3. निम्नलिखित में से कौन-से व्यंजक बहुपद हैं? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

$$(i) \frac{(x-2)(x-4)}{x} \quad (ii) \frac{1}{5x^{-2}} + 5x + 7$$

हल (i) $\frac{(x-2)(x-4)}{x} = \frac{x(x-4) - 2(x-4)}{x}$

$$= \frac{x^2 - 4x - 2x + 8}{x}$$

$$= \frac{x^2 - 6x + 8}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{6x}{x} + \frac{8}{x}$$

$$= x - 6 + \frac{8}{x}$$

एक बहुपद नहीं है, क्योंकि इसके प्रत्येक पद का घातांक ऋणेत्तर पूर्णांक नहीं है।

$$(ii) \frac{1}{5x^{-2}} + 5x + 7 = \frac{1}{5}x^2 + 5x + 7$$

एक बहुपद है, क्योंकि इसके प्रत्येक पद का घातांक पूर्ण संख्या है।

4. दिए गए व्यंजकों में से कौन-सा व्यंजक बहुपद है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

$$(i) \sqrt{2x-1} \quad (ii) x^2 + \frac{3x^{3/2}}{\sqrt{x}} \quad (iii) \frac{x-1}{x+1}$$

हल (i) $\sqrt{2x-1}$

एक बहुपद नहीं है, क्योंकि यहाँ बहुपद का घातांक पूर्ण संख्या नहीं है।

$$(ii) x^2 + \frac{3x^{3/2}}{\sqrt{x}} \Rightarrow x^2 + \frac{3x^{3/2}}{x^{1/2}}$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x^{2 - \frac{1}{2}} \quad [a^m \div a^n = a^{m-n}]$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x$$

एक बहुपद है, क्योंकि इसके प्रत्येक पद में चर राशि x की घात ऋणेत्तर पूर्णांक है।

$$(iii) \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow (x-1)(x+1)^{-1}$$

एक बहुपद नहीं है क्योंकि यहाँ, बहुपद का घातांक ऋणेत्तर पूर्णांक नहीं है।

5. निम्नलिखित व्यंजकों में से कौन-सा व्यंजक एक अथवा अधिक चरों में बहुपद है? अपने उत्तर का कारण दीजिए।

$$(i) 5x^{3/2} + 2y + 1 \quad (ii) x^4 + 2y + 1$$

$$(iii) \frac{x^4 + x^3 + x}{x} \quad (iv) \sqrt{y^3} + y^2 + 3$$

हल (i) $5x^{3/2} + 2y + 1$

एक बहुपद नहीं है, क्योंकि यहाँ, चर x का घातांक पूर्ण संख्या नहीं है।

$$(ii) x^4 + 2y + 1$$

यहाँ चरों x तथा y की घात पूर्ण संख्या है। अतः दिया गया व्यंजक दो चरों वाला बहुपद है।

$$(iii) \frac{x^4 + x^3 + x}{x} = \frac{x^4}{x} + \frac{x^3}{x} + \frac{x}{x}$$

$$= x^3 + x^2 + 1$$

एक बहुपद है, क्योंकि प्रत्येक पद में चर राशि x की घात पूर्ण संख्या है।

$$(iv) \sqrt{y^3} + y^2 + 3 \Rightarrow y^{\frac{3}{2}} + y^2 + 3$$

एक बहुपद नहीं है, क्योंकि यहाँ, प्रत्येक पद में चर y की घात पूर्ण संख्या नहीं है।

6. निम्नलिखित बहुपदों में x^2 का गुणांक ज्ञात कीजिए।

$$(i) (x-4)(x-4)$$

$$(ii) 1 - x^2 - x^3 + 2x^7$$

$$(iii) (x+4)(x+4)(x+4)$$

$$(iv) (2x-5)(2x^2-3x+1)$$

$$(v) (3x^2+2x-4)(x^2-3x-2)$$

हल (i) $(x-4)(x-4) = x(x-4) - 4(x-4)$

$$= x^2 - 4x - 4x + 16$$

$$= x^2 - 8x + 16$$

यहाँ, x^2 का गुणांक 1 है।

$$(ii) 1 - x^2 - x^3 + 2x^7 = 1 + (-1)x^2 + (-1)x^3 + 2x^7$$

यहाँ, x^2 का गुणांक -1 है।

$$(iii) (x+4)(x+4)(x+4) \\ = [x(x+4) + 4(x+4)](x+4) \\ = (x^2 + 4x + 4x + 16)(x+4) \\ = (x^2 + 8x + 16)(x+4) \\ = (x^2 + 8x + 16)(x) + (x^2 + 8x + 16)(4) \\ = x^3 + 8x^2 + 16x + 4x^2 + 32x + 64 \\ = x^3 + 12x^2 + 48x + 64$$

यहाँ, x^2 का गुणांक 12 है।

$$(iv) (2x-5)(2x^2-3x+1) \\ = 2x(2x^2-3x+1) - 5(2x^2-3x+1) \\ = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 10x^2 + 15x - 5 \\ = 4x^3 - 16x^2 + 17x - 5$$

यहाँ, x^2 का गुणांक -16 है।

7. $(x+3)^3$ के विस्तार में x^2 का गुणांक ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल } (x+3)^3 = x^3 + (3)^3 + 3(x)^2 \cdot 3 + 3 \cdot x \cdot (3)^2 \\ = x^3 + 27 + 9x^2 + 27x$$

यहाँ, x^2 का गुणांक 9 है।

8. निम्नलिखित बहुपदों की घात ज्ञात कीजिए।

$$(i) \sqrt{5} \quad (ii) 1 - x^2 - x^3 + 2x^7$$

$$(iii) (x-1)(x+1)$$

$$(iv) 4x^4 + 0 \cdot 3x^3 + 0 \cdot x^5 + 5x + 7$$

$$\text{हल } (i) \sqrt{5}$$

एक अचर बहुपद है, अतः इसकी घात 0 है।

$$(ii) 1 - x^2 - x^3 + 2x^7$$

यहाँ चर की सबसे बड़ी घात वाला पद $2x^7$ है, जिसका घातांक 7 है। अतः बहुपद की घात 7 है।

$$(iii) (x-1)(x+1)$$

$$= x(x+1) - 1(x+1) \\ = x^2 + x - x - 1 = x^2 - 1$$

यहाँ, चर की सबसे बड़ी घात वाला पद x^2 है, जिसका घातांक 2 है। अतः बहुपद की घात 2 है।

$$(iv) 4x^4 + 0 \cdot 3x^3 + 0 \cdot x^5 + 5x + 7$$

$$= 4x^4 + 0 \cdot 3x^3 + 5x + 7$$

यहाँ, चर की सबसे बड़ी घात वाला पद $4x^4$ है, जिसका घातांक 4 है। अतः बहुपद की घात 4 है।

9. निम्नलिखित बहुपदों को पदों के आधार पर एक पदीय, द्विपदीय आदि बहुपदों में वर्गीकृत कीजिए।

$$(i) 20y^3 + 3y + 8 \quad (ii) 4 \quad (iii) x^2 + 5x$$

$$\text{हल } (i) 20y^3 + 3y + 8$$

यहाँ, दिए गए बहुपद में पदों की संख्या 3 है। अतः यह त्रिपदीय बहुपद है।

$$(ii) 4$$

यहाँ, दिए गए बहुपद में पदों की संख्या 1 है। अतः यह एकपदीय बहुपद है।

$$(iii) x^2 + 5x$$

यहाँ, दिए गए बहुपद में पदों की संख्या 2 है। अतः यह द्विपदीय बहुपद है।

10. निम्नलिखित बहुपदों को घात के आधार पर रैखिक, द्विघात आदि बहुपदों में वर्गीकृत कीजिए।

$$(i) 5$$

$$(ii) 2x - 3$$

$$(iii) 2t^3 - 3t^2 + 5t - 4$$

$$(iv) 3y^2 - 4x + 5$$

$$\text{हल } (i) 5 = 5x^0$$

यहाँ, x की अधिकतम घात 0 है। अतः यह अचर बहुपद है।

$$(ii) 2x - 3$$

यहाँ, x की अधिकतम घात 1 है। अतः यह रैखिक बहुपद है।

$$(iii) 2t^3 - 3t^2 + 5t - 4$$

यहाँ, t की अधिकतम घात 3 है। अतः यह त्रिघात बहुपद है।

11. यदि $p = 3$ है, तब बहुपद $g(x) = (p-x)^3 + 14$ की घात ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल } \text{दिया है, } g(x) = (p-x)^3 + 14$$

$$\therefore g(x) = (3-x)^3 + 14 \\ = (3)^3 - x^3 - 3 \times 3 \times x(3-x) + 14 \\ = 27 - x^3 - 9x(3-x) + 14 \\ = 27 - x^3 - 27x + 9x^2 + 14$$

यहाँ, x की अधिकतम घात वाला पद $-x^3$ है, जिसका घातांक 3 है। अतः बहुपद का घात 3 है।

12. निम्न बहुपदों का एक उदाहरण दीजिए, जोकि

(i) घात 1 का एकपदीय हो।

(ii) घात 2 का द्विपदीय हो।

(iii) घात 5 का त्रिपदीय हो।

$$\text{हल } (i) \text{ घात 1 का एकपदीय बहुपद} = 4t$$

$$(ii) \text{ घात 2 का द्विपदीय बहुपद} = 5x^{22} + 3$$

$$(iii) \text{ घात 5 का त्रिपदीय बहुपद} = 2x^5 + 6x + 7$$

13. बहुपद $\frac{x^3 + 2x + 1}{5} - \frac{7}{2}x^2 - x^6$, के लिए ज्ञात कीजिए

- (i) बहुपद की घात (ii) x^3 का गुणांक
(iii) x^6 का गुणांक (iv) अचर पद

हल $\frac{x^3 + 2x + 1}{5} - \frac{7}{2}x^2 - x^6$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}x^3 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{5} - \frac{7}{2}x^2 - x^6$$

(i) यहाँ x की अधिकतम घात वाला पद $-x^6$ है, जिसका घातांक 6 है। अतः बहुपद का घात 6 है।

(ii) x^3 का गुणांक $\frac{1}{5}$ है।

(iii) x^6 का गुणांक -1 है।

(iv) अचर पद $\frac{1}{5}$ है।

प्रश्नावली 2.2

1. यदि $p(x) = x^2 - 2\sqrt{2}x + 1$ है, तब $p(2\sqrt{2})$ का मान ज्ञात कीजिए। (NCERT Exemplar)

हल दिया है, $p(x) = x^2 - 2\sqrt{2}x + 1$

$p(x)$ में, $x = 2\sqrt{2}$ रखने पर,

$$p(2\sqrt{2}) = (2\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2}(2\sqrt{2}) + 1 \\ = 4 \times 2 - 4 \times 2 + 1 = 1$$

2. यदि $f(t) = 4t^2 - 3t + 6$ है, तब ज्ञात कीजिए

- (i) $f(4)$ (ii) $f(-5)$

हल दिया है, $f(t) = 4t^2 - 3t + 6$

(i) $f(t)$ में $t = 4$ रखने पर,

$$f(4) = 4(4)^2 - 3(4) + 6 \\ = 4 \times 16 - 12 + 6 \\ = 64 - 12 + 6 \\ = 70 - 12 = 58$$

(ii) $f(t)$ में $t = -5$ रखने पर,

$$f(-5) = 4(-5)^2 - 3(-5) + 6 \\ = 4(25) + 15 + 6 \\ = 100 + 15 + 6 = 121$$

3. निम्न का मान ज्ञात कीजिए

- (i) यदि $f(x) = x - 9$ है, तब $f(x) - f(-x)$
(ii) यदि $p(x) = 4x^5 - 3x^4 - 5x^3 + x^2 - 8$, तब $p(-1)$
(iii) यदि $q(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$,

तब $q(-2) + q(-3) + q\left(\frac{1}{2}\right)$

हल (i) दिया है, $f(x) = x - 9$

...(i)

$p(x)$ में x के स्थान पर $-x$ रखने पर,

$$f(-x) = -x - 9$$

...(ii)

समी (i) में से समी (ii) को घटाने पर,

$$f(x) - f(-x) = (x - 9) - (-x - 9) \\ = x - 9 + x + 9 = 2x$$

(ii) दिया है, $p(x) = 4x^5 - 3x^4 - 5x^3 + x^2 - 8$

$p(x)$ में, $x = -1$ रखने पर,

$$p(-1) = 4(-1)^5 - 3(-1)^4 - 5(-1)^3 + (-1)^2 - 8 \\ = 4(-1) - 3(1) - 5(-1) + 1 - 8 \\ = -4 - 3 + 5 + 1 - 8 \\ = -15 + 6 = -9$$

(iii) दिया है, $q(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

$q(x)$ में क्रमशः $x = -2, -3$ तथा $\frac{1}{2}$

रखने पर,

$$q(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 3(-2) + 1 \\ = -8 + 3 \times 4 - 6 + 1 \\ = -8 + 12 - 6 + 1 \\ = -14 + 13 = -1$$

$$q(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 + 3(-3) + 1 \\ = -27 + 27 - 9 + 1 \\ = -8$$

तथा $q\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2}\right) + 1$

$$= \frac{1}{8} + \frac{3}{4} + \frac{3}{2} + 1 \\ = \frac{1 + 3 \times 2 + 3 \times 4 + 8}{8} \\ = \frac{1 + 6 + 12 + 8}{8} = \frac{27}{8}$$

$$\therefore f(-2) + q(-3) + q\left(\frac{1}{2}\right) \\ = (-1) + (-8) + \frac{27}{8} \\ = \frac{-9 \times 8 + 27}{8} \\ = \frac{-72 + 27}{8} = \frac{-45}{8}$$

4. बहुपद $p(x) = a^2x, a \neq 0$ का शून्यक क्या है?

हल दिया है, $p(x) = a^2x$

शून्यकों के लिए, $p(x) = 0$ रखने पर,

$$a^2x = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

अतः $x = 0$, $p(x)$ का एक शून्यक है।

5. किसी त्रिघातीय बहुपद में कितने शून्यक हो सकते हैं?

हल किसी बहुपद के शून्यकों की अधिकतम संख्या इसकी घात के बराबर होती है। अतः त्रिघातीय बहुपद में 3 शून्यक हो सकते हैं।

6. किसी शून्य बहुपद के कितने शून्यक हो सकते हैं?

हल शून्य बहुपद की घात परिभाषित नहीं है तथा बहुपद में शून्यकों की अधिकतम संख्या इसकी घात के बराबर होती है। अतः शून्य बहुपद के शून्यकों की संख्या अनन्त रूप से अनेक हो सकती है।

7. निम्नलिखित बहुपदों के शून्यक ज्ञात कीजिए।

$$(i) p(x) = 4 - 3x \quad (ii) p(t) = 2t - \frac{5}{2}$$

$$(iii) q(y) = 2y - \frac{1}{2} \quad (iv) r(z) = \frac{z}{2} - 3$$

हल (i) दिया है, $p(x) = 4 - 3x$

शून्यकों के लिए $p(x) = 0$ रखने पर,
 $4 - 3x = 0$

$$\Rightarrow 3x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

अतः $x = \frac{4}{3}$, $p(x)$ का एक शून्यक है।

$$(ii) \text{ दिया है, } p(t) = 2t - \frac{5}{2}$$

शून्यकों के लिए, $p(t) = 0$ रखने पर

$$2t - \frac{5}{2} = 0$$

$$\Rightarrow 2t = \frac{5}{2} \Rightarrow t = \frac{5}{4}$$

अतः $t = \frac{5}{4}$, $p(t)$ का एक शून्यक है।

$$(iii) \text{ दिया है, } q(y) = 2y - \frac{1}{2}$$

शून्यकों के लिए $q(y) = 0$ रखने पर,

$$2y - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow 2y = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{4}$$

अतः $y = \frac{1}{4}$, $p(y)$ का एक शून्यक है।

$$(iv) \text{ दिया है, } r(z) = \frac{z}{2} - 3$$

शून्यकों के लिए $r(z) = 0$ रखने पर,

$$\frac{z}{2} - 3 = 0 \Rightarrow \frac{z - 6}{2} = 0$$

$$\Rightarrow z - 6 = 0 \Rightarrow z = 6$$

अतः $z = 6$, $r(z)$ का एक शून्यक है।

8. सत्यापित कीजिए कि दिखाए गए मान निम्नलिखित स्थितियों में संगत बहुपद के शून्यक हैं।

$$(i) p(y) = 2y^2 + 5y - 3, y = -\frac{1}{2} \text{ पर}$$

$$(ii) p(z) = z^2 + z - 6, z = -3 \text{ पर}$$

$$(iii) p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1, x = 1 \text{ पर}$$

$$(iv) p(x) = 2x^3 - 9x^2 + x + 12, x = \frac{3}{2} \text{ पर}$$

हल (i) दिया है, $p(y) = 2y^2 + 5y - 3$... (i)

समी (i) में $y = -\frac{1}{2}$ रखने पर,

$$\begin{aligned} p\left(-\frac{1}{2}\right) &= 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 5\left(-\frac{1}{2}\right) - 3 \\ &= \frac{2}{4} - \frac{5}{2} - 3 = \frac{2 - 5 \times 2 - 3 \times 4}{4} \\ &= \frac{-20}{4} = -5 \end{aligned}$$

यहाँ, $p\left(-\frac{1}{2}\right) \neq 0$ अतः $y = -\frac{1}{2}$ दिए गए बहुपद का शून्यक नहीं है।

(ii) दिया है, $p(z) = z^2 + z - 6$... (i)

समी (i) में $z = -3$ रखने पर,

$$\begin{aligned} p(-3) &= (-3)^2 + (-3) - 6 \\ &= 9 - 3 - 6 = 0 \end{aligned}$$

यहाँ, $p(-3) = 0$ अतः $z = -3$ दिए गए बहुपद का एक शून्यक है।

(iii) दिया है, $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1$... (i)

समी (i) में $x = 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ रखने पर,

$$\begin{aligned} p(1) &= 2(1)^3 - 3(1)^2 + 5(1) - 1 \\ &= 2 \times 1 - 3 \times 1 + 5 \times 1 - 1 \\ &= 2 - 3 + 5 - 1 = 7 - 4 = 3 \end{aligned}$$

यहाँ, $p(1) \neq 0$ अतः $x = 1$ दिए गए बहुपद का शून्यक नहीं है।

(iv) दिया है, $p(x) = 2x^3 - 9x^2 + x + 12$... (i)

समी (i) में $x = \frac{3}{2}$ रखने पर,

$$\begin{aligned} p\left(\frac{3}{2}\right) &= 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 9\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} + 12 \\ &= 2\left(\frac{27}{8}\right) - 9\left(\frac{9}{4}\right) + \frac{3}{2} + 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{27}{4} - \frac{81}{4} + \frac{3}{2} + 12 \\
 &= \frac{27 - 81 + 3 \times 2 + 12 \times 4}{4} \\
 &= \frac{27 - 81 + 6 + 48}{4} = \frac{81 - 81}{4} = 0
 \end{aligned}$$

यहाँ, $p\left(\frac{3}{2}\right) = 0$, अतः $x = \frac{3}{2}$ दिए गए बहुपद का शून्यक है।

9. यदि $x = 2$ और $x = 0$, बहुपद $2x^3 - 5x^2 + ax + b$ के शून्यक हैं, तब a व b के मान ज्ञात कीजिए।

हल माना बहुपद $p(x) = 2x^3 - 5x^2 + ax + b \dots(i)$

दिया है, $x = 2$ और $x = 0$, $p(x)$ के शून्यक हैं।

समी (i) में क्रमशः $x = 2$ और $x = 0$ रखने पर,

$$p(2) = 2(2)^3 - 5(2)^2 + a(2) + b = 0$$

$$\Rightarrow 2 \times 8 - 5 \times 4 + 2a + b = 0$$

$$\Rightarrow 2a + b + 16 - 20 = 0$$

$$\Rightarrow 2a + b - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 2a + b = 4 \quad \dots(ii)$$

$$\text{तथा } p(0) = 2(0)^3 - 5(0)^2 + a(0) + b = 0$$

$$\Rightarrow b = 0$$

b का मान समी (ii) में रखने पर,

$$2a + 0 = 4 \Rightarrow 2a = 4$$

$$\Rightarrow a = \frac{4}{2} = 2$$

अतः $a = 2$ तथा $b = 0$

प्रश्नावली 2.3

1. यदि $x^2 + px - 30 = (x - 5)(x + 6)$, $\forall x$ तब p का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $x^2 + px - 30 = (x - 5)(x + 6)$

$$= x^2 + 6x - 5x - 30$$

$$\Rightarrow x^2 + px - 30 = x^2 + x - 30$$

दोनों पक्षों में x के गुणांकों की तुलना करने पर,

$$p = 1$$

2. यदि $x - 2$ और $x - \frac{1}{2}$ दोनों बहुपद $px^2 + 5x + r$ के

गुणनखण्ड हैं, तब दर्शाइए कि $p = r$

हल माना $g(x) = px^2 + 5x + r$

$\therefore (x - 2), g(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

$$\therefore g(2) = 0$$

$$\Rightarrow p(2)^2 + 5(2) + r = 0$$

$$\Rightarrow p(4) + 10 + r = 0$$

$$\Rightarrow 4p + r + 10 = 0 \quad \dots(i)$$

$\therefore \left(x - \frac{1}{2}\right), g(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

$$\therefore g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow p\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{2}\right) + r = 0$$

$$\Rightarrow p\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{5}{2} + r = 0$$

$$\Rightarrow \frac{p + 10 + 4r}{4} = 0$$

$$\Rightarrow p + 4r + 10 = 0 \quad \dots(ii)$$

समी (ii) को 4 से गुणा करके समी (i) में से घटाने पर,

$$(4p + r + 10) - 4(p + 4r + 10) = 0$$

$$\Rightarrow 4p + r + 10 - 4p - 16r - 40 = 0$$

$$\Rightarrow -15r - 30 = 0$$

$$\Rightarrow 15r = -30$$

$$\Rightarrow r = -2 \quad \dots(iii)$$

समी (i) में r का मान रखने पर,

$$4p + (-2) + 10 = 0$$

$$\Rightarrow 4p + 8 = 0$$

$$\Rightarrow 4p = -8$$

$$\Rightarrow p = -2 \quad \dots(iv)$$

समी (iii) तथा (iv) से,

$$p = r$$

3. निम्नलिखित बहुपदों के गुणनखण्ड कीजिए (मध्य पद विभक्त द्वारा)।

(i) $x^2 + 2x - 3$ (ii) $3x^2 + 7x - 6$

(iii) $2x^2 + 3\sqrt{5}x + 5$

हल (i) $x^2 + 2x - 3 = x^2 + 3x - x - 3$

$$= x(x + 3) - 1(x + 3)$$

$$= (x + 3)(x - 1)$$

(ii) $3x^2 + 7x - 6 = 3x^2 + 9x - 2x - 6$

$$= 3x(x + 3) - 2(x + 3)$$

$$= (3x - 2)(x + 3)$$

(iii) $2x^2 + 3\sqrt{5}x + 5 = 2x^2 + 2\sqrt{5}x + \sqrt{5}x + 5$

$$= 2x(x + \sqrt{5}) + \sqrt{5}(x + \sqrt{5})$$

$$= (x + \sqrt{5})(2x + \sqrt{5})$$

4. निम्नलिखित बहुपदों के गुणनखण्ड प्रमेय द्वारा गुणनखण्ड कीजिए।

(i) $3x^2 - 11x - 4$ (ii) $x^2 + 5x - 66$

(iii) $x^2 + \frac{12}{35}x + \frac{1}{35}$

हल (i) माना दिया गया बहुपद $p(x) = x^2 + 5x - 66$ यहाँ अचर पद -66 है, जिसका सम्भव गुणनखण्ड निम्न हैं

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 11, \pm 22, \pm 33 \text{ और } \pm 66$$

यहाँ, $x = 6$ पर,

$$\begin{aligned} f(6) &= 6^2 + 5 \times 6 - 66 \\ &= 36 + 30 - 66 \\ &= 66 - 66 = 0 \end{aligned}$$

$x = -11$ पर,

$$\begin{aligned} f(-11) &= (11)^2 + 5(-11) - 66 \\ &= 121 - 55 - 66 \\ &= 121 - 121 = 0 \end{aligned}$$

अतः $(x - 6)$ और $(x + 11)$ दिए गए द्विघातीय बहुपद के गुणनखण्ड हैं।

$$\text{तब, } p(x) = (x - 6)(x + 11)$$

(ii) माना $p(x) = 3x^2 - 11x - 4$

यहाँ, x^2 का गुणनखण्ड 1 नहीं है, इसलिए सर्वप्रथम हम x^2 का गुणांक एक बनाएँगे।

$$\begin{aligned} \therefore p(x) &= 3 \left(x^2 - \frac{11}{3}x - \frac{4}{3} \right) \\ &= 3g(x) \end{aligned} \quad \dots(i)$$

$$\text{जहाँ, } g(x) = x^2 - \frac{11}{3}x - \frac{4}{3}$$

जहाँ अचर पद $-\frac{4}{3}$ है, जिसके सम्भव गुणनखण्ड

$$\pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}, \pm 2, \pm 4 \text{ हैं।}$$

$x = -\frac{1}{3}$ पर,

$$\begin{aligned} g\left(-\frac{1}{3}\right) &= \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{11}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{4}{3} \\ &= \frac{1}{9} + \frac{11}{9} - \frac{4}{3} \\ &= \frac{12}{9} - \frac{4}{3} \\ &= \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 0 \end{aligned}$$

$x = 4$ पर,

$$\begin{aligned} g(4) &= (4)^2 - \frac{11}{3} \times 4 - \frac{4}{3} \\ &= 16 - \frac{44}{3} - \frac{4}{3} \\ &= 16 - 16 = 0 \end{aligned}$$

अतः $\left(x + \frac{1}{3}\right)$ और $(x - 4)$, $g(x)$ का गुणनखण्ड है।

अब समी (i) से,

$$\begin{aligned} p(x) &= 3 \left(x + \frac{1}{3} \right) (x - 4) \\ &= 3 \left(\frac{3x + 1}{3} \right) (x - 4) = (3x + 1)(x - 4) \end{aligned}$$

(iii) माना $p(x) = x^2 + \frac{12}{35}x + \frac{1}{35}$

यहाँ अचर पद $\frac{1}{35}$ है, जिसके सम्भव गुणनखण्ड $\pm \frac{1}{5}, \pm \frac{1}{7}$ और

$\pm \frac{1}{35}$ हैं।

$x = -\frac{1}{5}$ पर,

$$\begin{aligned} p\left(-\frac{1}{5}\right) &= \left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{12}{35} \times \left(-\frac{1}{5}\right) + \frac{1}{35} \\ &= \frac{1}{25} - \frac{12}{35 \times 5} + \frac{1}{35} \\ &= \frac{7 - 12 + 5}{35 \times 5} = 0 \end{aligned}$$

$x = -\frac{1}{7}$ पर,

$$\begin{aligned} p\left(-\frac{1}{7}\right) &= \left(-\frac{1}{7}\right)^2 + \frac{12}{35} \times \left(-\frac{1}{7}\right) + \frac{1}{35} \\ &= \frac{1}{49} - \frac{12}{35 \times 7} + \frac{1}{35} \\ &= \frac{5 - 12 + 7}{35 \times 7} = 0 \end{aligned}$$

अतः $\left(x + \frac{1}{5}\right)$ और $\left(x + \frac{1}{7}\right)$ दिए गए बहुपद के गुणनखण्ड हैं।

$$\text{तब, } p(x) = \left(x + \frac{1}{5}\right) \left(x + \frac{1}{7}\right)$$

5. बहुपद $p(x) = x^2 + x - 6$ के गुणनखण्ड क्या होंगे?

हल दिया है, $p(x) = x^2 + x - 6$

$$\begin{aligned} &= x^2 + 3x - 2x - 6 \\ &= x(x + 3) - 2(x + 3) \\ &= (x + 3)(x - 2) \end{aligned}$$

6. बहुपद $3x^2 - x - 4$ के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल दिया गया बहुपद $= 3x^2 - x - 4$

$$\begin{aligned} &= 3x^2 - 4x + 3x - 4 \\ &= x(3x - 4) + 1(3x - 4) \\ &= (3x - 4)(x + 1) \end{aligned}$$

7. निम्नलिखित के गुणनखण्ड कीजिए।

(i) $ab(x^2 + 1) + x(a^2 + b^2)$

(ii) $x^2 - (a + b)x + ab$

(iii) $\sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2}$

(iv) $x^2 - 24x - 180$

(v) $5\sqrt{5}x^2 + 20x + 3\sqrt{5}$

हल (i) $ab(x^2 + 1) + x(a^2 + b^2)$

$$= abx^2 + ab + a^2x + b^2x$$

$$= abx^2 + a^2x + b^2x + ab$$

$$= ax(bx + a) + b(bx + a)$$

$$= (ax + b)(bx + a)$$

(ii) $x^2 - (a + b)x + ab$

$$= x^2 - ax - bx + ab$$

$$= x(x - a) - b(x - a)$$

$$= (x - a)(x - b)$$

(iii) $\sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2}$

$$= \sqrt{2}x^2 + 2x + x + \sqrt{2}$$

$$= \sqrt{2}x(x + \sqrt{2}) + 1(x + \sqrt{2})$$

$$= (x + \sqrt{2})(\sqrt{2}x + 1)$$

(iv) $x^2 - 24x - 180$

$$= x^2 - 30x + 6x - 180$$

$$= x(x - 30) + 6(x - 30)$$

$$= (x - 30)(x + 6)$$

(v) $5\sqrt{5}x^2 + 20x + 3\sqrt{5}$

$$= 5\sqrt{5}x^2 + 5x + 15x + 3\sqrt{5}$$

$$= 5x(\sqrt{5}x + 1) + 3\sqrt{5}(\sqrt{5}x + 1)$$

$$= (5x + 3\sqrt{5})(\sqrt{5}x + 1)$$

8. (i) बहुपद $x^2 - 4x + 4$ के गुणनखण्ड कीजिए।

(ii) बहुपद $8a^3 + b^3 + 12ba^2 + 6ab^2$ के गुणनखण्ड कीजिए।

हल (i) दिया गया बहुपद

$$= x^2 - 4x + 4 = x^2 - 2x - 2x + 4$$

$$= x(x - 2) - 2(x - 2)$$

$$= (x - 2)(x - 2)$$

(ii) दिया गया बहुपद

$$= 8a^3 + b^3 + 12ba^2 + 6ab^2$$

$$= (2a)^3 + (b)^3 + 6ab(2a + b)$$

$$= (2a + b)^3$$

$$[\because (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)]$$

$$= (2a + b)(2a + b)(2a + b)$$

9. बहुपद $x^3 - 2x^2y + 3xy^2 - 6y^3$ के गुणनखण्ड कीजिए।

हल दिया गया बहुपद

$$= x^3 - 2x^2y + 3xy^2 - 6y^3$$

$$= x^2(x - 2y) + 3y^2(x - 2y)$$

$$= (x - 2y)(x^2 + 3y^2)$$

10. बहुपद $3u^3 - 4u^2 - 12u + 16$ के गुणनखण्ड कीजिए।

हल दिया गया बहुपद

$$= 3u^3 - 4u^2 - 12u + 16$$

$$= u^2(3u - 4) - 4(3u - 4)$$

$$= (3u - 4)(u^2 - 4)$$

$$= (3u - 4)(u + 2)(u - 2)$$

$$[\because (x + y)(x - y) = x^2 - y^2]$$

11. बहुपद $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ के गुणनखण्ड कीजिए।

हल माना $p(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

यहाँ अचर पद -6 है, जिसके सम्भव गुणनखण्ड $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ हैं।

$x = 2$ पर,

$$p(2) = (2)^3 + 2(2)^2 - 5 \times 2 - 6$$

$$= 8 + 2 \times 4 - 10 - 6$$

$$= 8 + 8 - 10 - 6 = 16 - 16 = 0$$

अतः $(x - 2)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

$$\therefore x^3 + 2x^2 - 5x - 6$$

$$= x^3 - 2x^2 + 2x^2 + 2x^2 - 5x - 6$$

$$= x^2(x - 2) + 4x^2 - 5x - 6$$

$$= x^2(x - 2) + 4x^2 - 8x + 8x - 5x - 6$$

$$= x^2(x - 2) + 4x(x - 2) + 3x - 6$$

$$= x^2(x - 2) + 4x(x - 2) + 3(x - 2)$$

$$= (x - 2)(x^2 + 4x + 3)$$

$[(x - 2)$ को सर्वनिष्ठ लेने पर]

अब, $x^2 + 4x + 3 = x^2 + 3x + x + 3$

$$= x(x + 3) + 1(x + 3) = (x + 3)(x + 1)$$

$$\therefore x^3 + 2x^2 - 5x - 6$$

$$= (x - 2)(x + 3)(x + 1)$$

12. निम्नलिखित के गुणनखण्ड कीजिए।

(i) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

(ii) $2t^3 - 5t^2 - 19t + 42$

हल (i) माना $p(x) = x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

यहाँ अचर पद 20 है, जिसके सभी सम्भव गुणनखण्ड $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20$ हैं।

$x = -1$ पर,

$$\begin{aligned} p(-1) &= (-1)^3 + 13(-1)^2 + 32(-1) + 20 \\ &= -1 + 13 - 32 + 20 \\ &= -33 + 33 = 0 \end{aligned}$$

अतः $(x+1)$, $p(x)$ का एक गुणखण्ड है।

अन्य गुणखण्ड के लिए,

$$x+1) \overline{x^3 + 13x^2 + 32x + 20} \quad (x^2 + 12x + 20)$$

$$\begin{array}{r} x^3 + x^2 \\ \underline{-} \quad \underline{-} \\ 12x^2 + 32x \\ 12x^2 + 12x \\ \underline{-} \quad \underline{-} \\ 20x + 20 \\ 20x + 20 \\ \underline{-} \quad \underline{-} \\ 0 \end{array}$$

$$\text{अतः } p(x) = (x+1)(x^2 + 12x + 20)$$

यहाँ, $x^2 + 12x + 20$

$$\begin{aligned} &= x^2 + 10x + 2x + 20 \\ &= x(x+10) + 2(x+10) \\ &= (x+2)(x+10) \end{aligned}$$

$$\text{अतः } x^3 + 13x^2 + 32x + 20$$

$$= (x+1)(x+2)(x+10)$$

(ii) माना बहुपद $p(t) = 2t^3 - 5t^2 - 19t + 42$

यहाँ अचर पद 42 है, जिसके सभी सम्भव गुणखण्ड निम्न हैं

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 7, \pm 14, \pm 21, \pm 42$$

$t = 2$ पर,

$$\begin{aligned} p(2) &= 2(2)^3 - 5(2)^2 - 19(2) + 42 \\ &= 2 \times 8 - 5 \times 4 - 19 \times 2 + 42 \\ &= 16 - 20 - 38 + 42 = 58 - 58 = 0 \end{aligned}$$

अतः $(t-2)$, बहुपद $p(t)$ का एक गुणखण्ड है।

अन्य गुणखण्ड के लिए,

$$t-2) \overline{2t^3 - 5t^2 - 19t + 42} \quad (2t^2 - t - 21)$$

$$\begin{array}{r} 2t^3 - 4t^2 \\ \underline{-} \quad \underline{+} \\ -t^2 - 19t \\ -t^2 + 2t \\ \underline{+} \quad \underline{-} \\ -21t + 42 \\ -21t + 42 \\ \underline{+} \quad \underline{-} \\ 0 \end{array}$$

$$\text{अतः } p(t) = (t-2)(2t^2 - t - 21)$$

यहाँ, $2t^2 - t - 21$

$$\begin{aligned} &= 2t^2 - 7t + 6t - 21 \\ &= t(2t - 7) + 3(2t - 7) \\ &= (2t - 7)(t + 3) \end{aligned}$$

$$\text{अतः } 2t^3 - 5t^2 - 19t + 42$$

$$= (t-2)(2t-7)(t+3)$$

13. यदि $(x-4)$, बहुपद $q(x) = x^3 - 5x^2 - px + 24$ का गुणखण्ड है, तब p का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $q(x) = x^3 - 5x^2 - px + 24$ यदि $q(x)$, $(x-4)$ से पूर्णतः विभाजित है, तब $(x-4)$ बहुपद $q(x)$ का एक गुणखण्ड होगा।

$$\therefore x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$q(x)$ में $x = 4$ रखने पर,

$$q(4) = (4)^3 - 5(4)^2 - p(4) + 24 = 0$$

$$\Rightarrow 64 - 5 \times 16 - 4p + 24 = 0$$

$$\Rightarrow 64 - 80 - 4p + 24 = 0$$

$$\Rightarrow 88 - 80 - 4p = 0$$

$$\Rightarrow 4p = 8 \Rightarrow p = 2$$

14. बहुपद $x^3 - 1^3 - 10x^2 - 53x - 41$ के गुणखण्ड कीजिए।

हल माना $p(x) = x^3 - 1^3 - 10x^2 - 53x - 41$

$$= x^3 - 1 - 10x^2 - 53x - 41$$

$$= x^3 - 10x^2 - 53x - 42$$

यहाँ अचर पद -42 है, जिसके सभी सम्भव गुणखण्ड

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 7, \pm 14, \pm 21, \pm 42 \text{ हैं।}$$

$x = -1$ पर,

$$p(-1) = (-1)^3 - 10(-1)^2 - 53(-1) - 42$$

$$= -1 - 10 + 53 - 42$$

$$= -53 + 53 = 0$$

अतः $x+1$, $p(x)$ का एक गुणखण्ड है

$$\therefore x^3 - 10x^2 - 53x - 42$$

$$= x^3 + x^2 - x^2 - 10x^2 - 53x - 42$$

$$= x^2(x+1) - 11x^2 - 53x - 42$$

$$= x^2(x+1) - 11x^2 - 11x + 11x - 53x - 42$$

$$= x^2(x+1) - 11x(x+1) - 42x - 42$$

$$= x^2(x+1) - 11x(x+1) - 42(x+1)$$

$$= (x+1)(x^2 - 11x - 42)$$

अब, $x^2 - 11x - 42$

$$= x^2 - 14x + 3x - 42$$

$$= x(x-14) + 3(x-14)$$

$$= (x-14)(x+3)$$

$$\therefore x^3 - 10x^2 - 53x - 42$$

$$= (x+1)(x-14)(x+3)$$

15. यदि $(x^2 - 1)$, बहुपद $ax^3 + bx^2 + cx + d$, का गुणनखण्ड है, तब दर्शाइए कि $a + c = 0$

हल माना $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

यदि $p(x)$, $x^2 - 1$ से पूर्णतः विभाजित है, तब $(x^2 - 1)$ बहुपद $p(x)$ का गुणनखण्ड होगा।

$$\therefore x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow x = -1, 1$$

$$\therefore p(-1) = a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) + d = 0$$

$$\Rightarrow -a + b - c + d = 0$$

$$\Rightarrow b + d = a + c \quad \dots(i)$$

$$\text{तथा } p(1) = a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) + d = 0$$

$$\Rightarrow a + b + c + d = 0$$

$$\Rightarrow (a + c) + (b + d) = 0$$

$$\Rightarrow (a + c)(a + c) = 0$$

[समी (i) से $b + d = a + c$ रखने पर]

$$\Rightarrow 2(a + c) = 0$$

$$\Rightarrow a + c = 0$$

16. (i) यदि $(x - 3)$, बहुपद $k^2x^3 - x^2 + 3x - 1$ का एक गुणनखण्ड है, तब k का मान ज्ञात कीजिए।

(ii) यदि $(x + 2)$, बहुपद $x^3 + 6x^2 + 4x + k$ का गुणनखण्ड है, तब k का मान ज्ञात कीजिए।

हल (i) माना $p(x) = k^2x^3 - x^2 + 3x - 1$ यदि $p(x)$, $x - 3$ से पूर्णतः विभाजित है, तब $(x - 3)$ बहुपद $p(x)$ का एक गुणनखण्ड होगा।

$$\therefore x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$p(x)$ में $x = 3$ रखने पर,

$$p(3) = k^2(3)^3 - (3)^2 + 3(3) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow k^2(27) - 9 + 9 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 27k^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{1}{27}$$

$$\Rightarrow k = \pm \frac{1}{\sqrt{27}} = \pm \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

(ii) माना $p(x) = x^3 + 6x^2 + 4x + k$ यदि $p(x)$, $x + 2$ से पूर्णतः विभाजित है, तब $(x + 2)$ बहुपद $p(x)$ का एक गुणनखण्ड होगा।

$$\therefore x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$p(x)$ में $x = -2$ रखने पर,

$$p(-2) = (-2)^3 + 6(-2)^2 + 4(-2) + k = 0$$

$$\Rightarrow -8 + 6 \times 4 - 8 + k = 0$$

$$\Rightarrow -8 + 24 - 8 + k = 0$$

$$\Rightarrow 8 + k = 0$$

$$\Rightarrow k = -8$$

17. यदि $(x - 2)$, बहुपद $8x^3 + 4x^2 - 3x + k$ का गुणनखण्ड है, तब k का मान ज्ञात कीजिए।

हल माना $p(x) = 8x^3 + 4x^2 - 3x + k$ यदि $p(x)$, $(x - 2)$ से पूर्णतः विभाजित है, तब $(x - 2)$ बहुपद $p(x)$ का एक गुणनखण्ड होगा।

$$\therefore x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$p(x)$ में $x = 2$ रखने पर,

$$p(2) = 8(2)^3 + 4(2)^2 - 3(2) + k = 0$$

$$\Rightarrow 8 \times 8 + 4 \times 4 - 6 + k = 0$$

$$\Rightarrow 64 + 16 - 6 + k = 0$$

$$\Rightarrow 74 + k = 0$$

$$\Rightarrow k = -74$$

18. (i) गुणनखण्ड प्रमेय के प्रयोग से, दर्शाइए कि $(x - 2)$ बहुपद $2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$ का गुणनखण्ड है।

(ii) गुणनखण्ड प्रमेय के प्रयोग से, दर्शाइए कि $(x - 1)$ बहुपद $4x^3 + 3x^2 - 4x - 3$ का गुणनखण्ड है।

हल (i) माना $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$

तथा $g(x) = x - 2$

$g(x) = 0$ रखने पर,

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

अब बहुपद $p(x)$ में $x = 2$ रखने पर,

$$p(2) = 2(2)^3 - 3(2)^2 - 17(2) + 30$$

$$= 2 \times 8 - 3 \times 4 - 34 + 30$$

$$= 16 - 12 - 34 + 30$$

$$= 46 - 46 = 0$$

अतः गुणनखण्ड प्रमेय से सत्यापित है कि $x - 2$, $2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$ का एक गुणनखण्ड है।

(ii) माना $p(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x - 3$

तथा $g(x) = x - 1$

$g(x) = 0$ रखने पर,

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

अब, बहुपद $p(x)$ में $x = 1$ रखने पर,

$$p(1) = 4(1)^3 + 3(1)^2 - 4(1) - 3$$

$$= 4 \times 1 + 3 \times 1 - 4 - 3$$

$$= 4 + 3 - 4 - 3 = 0$$

अतः गुणनखण्ड प्रमेय से सत्यापित है कि $(x - 1)$, बहुपद $4x^3 + 3x^2 - 4x - 3$ का एक गुणनखण्ड है।

19. ज्ञात कीजिए कि $(x - 2)$, बहुपद $3x^4 + 4x^3 - 10x^2 - 5x - 28$ का गुणनखण्ड है।

हल माना $p(x) = 3x^4 + 4x^3 - 10x^2 - 5x - 28$

तथा $g(x) = x - 2$

$g(x) = 0$ रखने पर,

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

अब, बहुपद $p(x)$ में $x = 2$ रखने पर,

$$\begin{aligned} p(2) &= 3(2)^4 + 4(2)^3 - 10(2)^2 - 5(2) - 28 \\ &= 3 \times 16 + 4 \times 8 - 10 \times 4 - 10 - 28 \\ &= 48 + 32 - 40 - 10 - 28 = 80 - 78 \\ &= 2 \neq 0 \end{aligned}$$

अतः गुणनखण्ड प्रमेय से $x - 2$, $p(x)$ का गुणनखण्ड नहीं है।

20. दर्शाइए कि $(x + 5)$, बहुपद $f(x) = x^3 + x^2 + 3x + 115$ का गुणनखण्ड है।

हल दिया है, $f(x) = x^3 + x^2 + 3x + 115$

तथा $g(x) = x + 5$

$g(x) = 0$ रखने पर,

$$x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$$

अब, बहुपद $f(x)$ में $x = -5$ रखने पर,

$$\begin{aligned} f(-5) &= (-5)^3 + (-5)^2 + 3(-5) + 115 \\ &= -125 + 25 - 15 + 115 \\ &= -140 + 140 = 0 \end{aligned}$$

अतः गुणनखण्ड प्रमेय से सत्यापित होता है कि $x + 5$, $f(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

प्रश्नावली 2.4

1. उपर्युक्त सर्वसमिका का उपयोग करके निम्नलिखित के गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(i) $(x - 3)(x + 3)$ (ii) $(y + 5)(y - 7)$

हल (i) $(x - 3)(x + 3) = (x)^2 - (3)^2$

$$\begin{aligned} & \quad \quad \quad [\because (x + a)(x - a) = x^2 - a^2] \\ &= x^2 - 9 \end{aligned}$$

(ii) $(y + 5)(y - 7) = y^2 + y(5 - 7) + (5)(-7)$

$$[\because (x + a)(x + b) = x^2 + x(a + b) + ab]$$

$$= y^2 + y(-2) - 35 = y^2 - 2y - 35$$

2. $y^2 - \frac{x^2}{100}$ के गुणनखण्डन के लिए कौन-सी सर्वसमिका उपयोगी होगी?

हल $y^2 - \frac{x^2}{100} = (y)^2 - \left(\frac{x}{10}\right)^2$

$$= \left(y + \frac{x}{10}\right) \left(y - \frac{x}{10}\right)$$

$$[\because (a + b)(a - b) = a^2 - b^2]$$

अतः $y^2 - \frac{x^2}{100}$ के गुणनखण्ड के लिए सर्वसमिका

$(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$ उपयोगी है।

3. गुणन परिकलन किए बिना निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।

(i) 77×79

(ii) 109×105

हल (i) $77 \times 79 = (80 - 3)(80 - 1)$

$$= (80)^2 + 80(-3 - 1) + (-3) \times (-1)$$

$$= 6400 + 80(-4) + 3$$

$$[\because (x + a)(x + b) = x^2 + x(a + b) + ab]$$

$$= 6400 - 320 + 3 = 6083$$

(ii) $109 \times 105 = (100 + 9) \times (100 + 5)$

$$= (100)^2 + 100(9 + 5) + 9 \times 5$$

$$[\because (x + a)(x + b) = x^2 + x(a + b) + ab]$$

$$= 10000 + 100 \times 14 + 45$$

$$= 10000 + 1400 + 45 = 11445$$

4. उपर्युक्त सर्वसमिका के उपयोग से निम्नलिखित में से प्रत्येक को विस्तारित कीजिए।

(i) $(x - 2y - 3z)^2$

(ii) $\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b + c\right)^2$

हल (i) $(x - 2y - 3z)^2$

$$= (x)^2 + (-2y)^2 + (-3z)^2 + 2(x)(-2y)$$

$$+ 2(-2y)(-3z) + 2(x)(-3z)$$

$$= x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy + 12yz - 6xz$$

$$[\because (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca]$$

(ii) $\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b + c\right)^2$

$$= \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}b\right)^2 + (c)^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2}a\right)$$

$$\left(-\frac{1}{3}b\right) + 2 \times \left(-\frac{1}{3}b\right)(c) + 2 \times \left(\frac{1}{2}a\right)(c)$$

$$= \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{9} + c^2 - \frac{2bc}{3} - \frac{2bc}{3} + ac$$

5. उपर्युक्त सर्वसमिका के उपयोग से निम्नलिखित के गुणनखण्ड कीजिए।

(i) $4y^2 + 4xy + x^2$

(ii) $9z^2 - 6zy + y^2$

(iii) $y^2 - \frac{z^2}{25}$

हल (i) $4y^2 + 4xy + x^2$

$$= (2y)^2 + 2 \cdot 2y \cdot x + (x)^2 = (2y + x)^2$$

$$[\because (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2]$$

$$= (2y + x)(2y + x)$$

(ii) $9z^2 - 6zy + y^2$

$$= (3z)^2 - 2 \times 3z \times y + (y)^2$$

$$= (3z - y)^2 = (3z - y)(3z - y)$$

$$(iii) y^2 - \frac{z^2}{25} = (y)^2 - \left(\frac{z}{5}\right)^2 = \left(y + \frac{z}{5}\right)\left(y - \frac{z}{5}\right)$$

$$[\because a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)]$$

6. उपर्युक्त सर्वसमिका के उपयोग से निम्नलिखित के गुणनखण्ड कीजिए।

$$(i) 4a^2 + 9b^2 + 16c^2 + 12ab - 24bc - 16ca$$

$$(ii) x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy - 4yz + 2xz$$

हल (i) $4a^2 + 9b^2 + 16c^2 + 12ab - 24bc - 16ca$

$$= (-2a)^2 + (-3b)^2 + (4c)^2$$

$$+ 2 \times (-2a)(-3b) + 2 \times (-3b) \times (4c)$$

$$+ 2 \times (-2a) \times (4c)$$

$$= (-2a - 3b + 4c)^2$$

$$[\because (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca]$$

$$= (-2a - 3b + 4c) \cdot (-2a - 3b + 4c)$$

$$(ii) x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy - 4yz + 2zx$$

$$= (x)^2 + (-2y)^2 + (z)^2 + 2 \times (x) \times (-2y)(z)$$

$$+ 2 \times (-2y)(z) + 2 \times x \times z$$

$$= (x - 2y + z)^2$$

$$= (x - 2y + z)(x - 2y + z)$$

7. निम्नलिखित घनों को प्रसारित रूप में लिखिए।

$$(i) \left(\frac{3}{2}x + 1\right)^3 \quad (ii) \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right)^3$$

हल (i) $\left(\frac{3}{2}x + 1\right)^3$

$$= \left(\frac{3}{2}x\right)^3 + (1)^3 + 3\left(\frac{3}{2}x\right)^2(1) + 3\left(\frac{3}{2}x\right)(1)^2$$

$$[\because (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2]$$

$$= \frac{27}{8}x^3 + 1 + 3 \times \frac{9}{4}x^2 + \frac{9x}{2}$$

$$= \frac{27}{8}x^3 + \frac{27}{4}x^2 + \frac{9}{2}x + 1$$

$$(ii) \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right)^3 = \left(\frac{x}{2}\right)^3 - \left(\frac{y}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{2}\right)^2\left(\frac{y}{3}\right) + 3\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{y}{3}\right)^2$$

$$[\because (a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2]$$

$$= \frac{x^3}{8} - \frac{y^3}{27} - \frac{x^2y}{4} + \frac{xy^2}{6}$$

$$= \frac{x^3}{8} - \frac{x^2y}{4} + \frac{xy^2}{6} - \frac{y^3}{27}$$

$$[\because (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab^2 + 3a^2b]$$

8. उपर्युक्त सर्वसमिका के उपयोग से, निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।

$$(i) (997)^3 \quad (ii) (103)^3$$

हल (i) $(997)^3 = (1000 - 3)^3$

$$= (1000)^3 - (3)^3 - 3(1000)^2(3)$$

$$+ 3(1000)(3)^2$$

$$= 1000000000 - 27 - 3 \times 1000000 \times 3$$

$$+ 3 \times 1000 \times 9$$

$$= 1000000000 - 27 - 9000000 + 27000$$

$$= 991026973$$

$$(ii) (103)^3 = (100 + 3)^3$$

$$= (100)^3 + (3)^3 + 3 \times (100)^2 \times 3 + 3 \times 100 \times (3)^2$$

$$[\because (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2]$$

$$= 1000000 + 9 + 3 \times 10000 \times 3 + 3$$

$$\times 100 \times 9$$

$$= 1000000 + 9 + 90000 + 2700$$

$$= 1092727$$

9. उपर्युक्त सर्वसमिका के उपयोग से, निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।

$$(i) 125x^3 + y^3$$

$$(ii) 8x^3 - (2x - y)^3$$

$$(iii) (2x - 5y)^3 - (2x - y)^3$$

हल (i) $125x^3 + y^3 = (5x)^3 + (y)^3$

$$= (5x + y) [(5x)^2 - 5x \times y + y^2]$$

$$[\because a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)]$$

$$= (5x + y)(25x^2 - 5xy + y^2)$$

$$(ii) 8x^3 - (2x - y)^3 = (2x)^3 - (2x - y)^3$$

$$= (2x - 2x + y) [(2x)^2 + 2x \times (2x - y) + (2x - y)^2]$$

$$[\because a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)]$$

$$= y(4x^2 + 4x^2 - 2xy + 4x^2 + y^2 - 4xy)$$

$$= y(12x^2 + y^2 - 6xy)$$

$$(iii) (2x - 5y)^3 - (2x - y)^3$$

$$= \{2x - 5y - 2x + y\} \{(2x - 5y)^2$$

$$+ (2x - 5y)(2x - y) + (2x - y)^2\}$$

$$[\because a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)]$$

$$= (-4y) \{4x^2 + 25y^2 - 2 \times 2x \times 5y + 4x^2$$

$$- 2xy - 10xy + 5y^2 + 4x^2 + y^2 - 4xy\}$$

$$= (-4y) \{12x^2 + 31y^2 - 36xy\}$$

$$= 144xy^2 - 48x^2y - 124y^3$$

10. उपर्युक्त सर्वसमिका के उपयोग से, निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।

$$(i) x^3 - 8y^3 - 6x^2y + 12xy^2$$

$$(ii) 27a^3 + \frac{1}{64b^3} + \frac{27a^2}{4b} + \frac{9a}{16b^2}$$

हल (i) $x^3 - 8y^3 - 6x^2y + 12xy^2$

$$= x^3 - (2y)^3 - 3 \times (x)^2 \times 2y + 3 \times x^2 \times (2y)^2$$

$$= (x - 2y)^3 \quad [\because (a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2]$$

$$(ii) 27a^3 + \frac{1}{64b^3} + \frac{27a^2}{4b} + \frac{9a}{16b^2}$$

$$= (3a)^3 + \left(\frac{1}{4b}\right)^3 + 3 \times (3a)^2 \times \left(\frac{1}{4b}\right) + 3 \times (3a) \times \left(\frac{1}{4b}\right)^2$$

$$= \left(3a + \frac{1}{4b}\right)^3 \quad [\because (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2]$$

11. वास्तव में घनों का परिकलन किए बिना, निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।

$$(i) (0.2)^3 - (0.3)^3 + (0.1)^3$$

$$(ii) (7)^3 - (4)^3 - (3)^3$$

हल (i) माना $x = 0.2$, $y = -0.3$ तथा $z = 0.1$

$$\text{अब, } x + y + z = 0.2 + (-0.3) + 0.1$$

$$= 0.3 - 0.3 = 0$$

$$\therefore (0.2)^3 - (0.3)^3 + (0.1)^3 = (0.2)^3 + (-0.3)^3 + (0.1)^3$$

$$= 3 \times (0.2) \times (-0.3) \times (0.1) = -0.018$$

$$[\because \text{यदि } x + y + z = 0, \text{ तब } x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz]$$

$$(ii) (7)^3 - (4)^3 - (3)^3 = (7)^3 + (-4)^3 + (-3)^3$$

$$\text{माना } x = 7, y = -4 \text{ तथा } z = -3$$

$$\text{अब, } x + y + z = 7 - 4 - 3 = 0$$

$$[\because \text{यदि } x + y + z = 0, \text{ तब } x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz]$$

$$\therefore (7)^3 - (4)^3 - (3)^3$$

$$= 3 \times (7) \times (-4) \times (-3) = 252$$

12. सरल कीजिए

$$(2a + b)^3 - (2a - b)^3 - 6b(2a + b)(2a - b)$$

हल $(2a + b)^3 - (2a - b)^3 - 6b(2a + b)(2a - b)$

$$= [(2a)^3 + b^3 + 3(2a)^2(b) + 3(2a)(b)^2]$$

$$- [(2a)^3 - (b)^3 - 3 \times (2a)^2(b) + 3(2a)(b)^2]$$

$$- 6b[(2a)^2 - (b)^2]$$

$$[\because (x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2]$$

$$(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2$$

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

$$= (8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2)$$

$$- (8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2) - 6b(4a^2 - b^2)$$

$$= 8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2 - 8a^3 + b^3 + 12a^2b$$

$$- 6ab^2 - 24a^2b + 6b^3$$

$$= 8b^3$$

13. उपर्युक्त सर्वसमिका के उपयोग से, सरल कीजिए।

$$(a - b - 1)(a^2 + b^2 + 1 + ab + a - b)$$

हल $(a - b - 1)(a^2 + b^2 + 1 + ab + a - b)$

$$\Rightarrow [a + (-b) + (-1)] [a^2 + b^2 + (1)^2]$$

$$- (a)(-b) - (-b)(-1) - (a)(-1)$$

$$= a^3 + (-b)^3 + (-1)^3 - 3(a)(-b)(-1)$$

$$= a^3 - b^3 - 1 - 3ab$$

$$[\because x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)$$

$$(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)]$$

14. उस आयत की लम्बाई और चौड़ाई के लिए सम्भव व्यंजक दीजिए, जिसका क्षेत्रफल $35y^2 + 8y - 16$ है।

हल $35y^2 + 8y - 16$

$$= 35y^2 + 28y - 20y - 16$$

$$= 7y(5y + 4) - 4(5y + 4)$$

$$= (7y - 4)(5y + 4)$$

$$\therefore \text{लम्बाई/चौड़ाई} = 7y - 4$$

$$\text{तथा} = 5y + 4$$

15. यदि $y^2 + \frac{1}{y^2} = 23$ है, तब $\left(y + \frac{1}{y}\right)$ के ऋणात्मक मान की

सहायता से $y^3 + \frac{1}{y^3}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $y^2 + \frac{1}{y^2} = 23$

$$\Rightarrow y^2 + \frac{1}{y^2} + 2 = 23 + 2 \quad [\text{दोनों पक्षों में 2 जोड़ने पर}]$$

$$\Rightarrow \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 = 25$$

$$\Rightarrow \left(y + \frac{1}{y}\right) = \pm 5 \quad [\text{वर्गमूल लेने पर}]$$

ऋणात्मक चिह्न लेने पर, $y + \frac{1}{y} = -5$

दोनों पक्षों का घन करने पर,

$$\left(y + \frac{1}{y}\right)^3 = (-5)^3$$

$$\Rightarrow y^3 + \frac{1}{y^3} + 3 \times y^2 \times \frac{1}{y} + 3 \times y \times \frac{1}{y^2} = -125$$

$$\Rightarrow y^3 + \frac{1}{y^3} + 3y + \frac{3}{y} = -125$$

$$\Rightarrow y^3 + \frac{1}{y^3} + 3\left(y + \frac{1}{y}\right) = -125$$

$$\Rightarrow y^3 + \frac{1}{y^3} + 3(-5) = -125 \quad \left[\because y + \frac{1}{y} = -5 \right]$$

$$\Rightarrow y^3 + \frac{1}{y^3} - 15 = -125$$

$$\Rightarrow y^3 + \frac{1}{y^3} = -125 + 15 = -110$$

16. यदि $a + b + c = 5$ और $ab + bc + ca = 10$ है, तब सिद्ध कीजिए कि

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = -25$$

हल दिया है, $a + b + c = 5$... (i)

और $ab + bc + ca = 10$... (ii)

अब, $(a + b + c)^2 = (5)^2$
 $= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 25$
 $= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 25$
 $= a^2 + b^2 + c^2 + 2 \times 10 = 25$
 $= a^2 + b^2 + c^2 = 25 - 20 = 5$... (iii)

∴ बायाँ पक्ष

$$\begin{aligned} &= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ &= (5)(5 - 10) \quad \text{[समी (i), (ii) तथा (iii) से]} \\ &= (5)(-5) \\ &= -25 = \text{दायाँ पक्ष} \end{aligned}$$

इति सिद्धम्

17. यदि $a + b = 12$ तथा $ab = 27$ है, तब $a^3 + b^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $a + b = 12$ तथा $ab = 27$

अब, $(a + b)^2 = (12)^2 = 144$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 144$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + 2 \times 27 = 144$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + 54 = 144$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 144 - 54 = 90$$

$$[\because a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)]$$

$$= (a + b)(a^2 + b^2 - ab)$$

$$= (12)(90 - 27) = 12 \times 63 = 756$$

18. यदि $x - \frac{1}{x} = 2$ है, तब $x^4 + \frac{1}{x^4}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $x - \frac{1}{x} = 2$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर, $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = (2)^2$

$$[\because (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab]$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \times x \times \frac{1}{x} = 4$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 4$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 6$$

पुनः दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = (6)^2$$

$$\Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} + 2 \times x^2 \times \frac{1}{x^2} = 36$$

$$\Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} + 2 = 36$$

$$\Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = 36 - 2$$

$$\Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = 34$$



प्रश्नावली 3.1

1. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जहाँ दोनों अक्ष मिलते हैं।

हल हम जानते हैं कि जिस बिन्दु पर दोनों अक्ष मिलते हैं, उसे मूलबिन्दु कहते हैं जिसके निर्देशांक (0, 0) होते हैं।

2. बिन्दु $S(-3, 6)$ की Y -अक्ष से दूरी ज्ञात कीजिए।

हल बिन्दु $S(-3, 6)$, Y -अक्ष से 3 इकाई दूरी पर स्थित है।

3. यदि दो बिन्दुओं के निर्देशांक $P(-2, 3)$ और $Q(-3, 5)$ हैं, तब (P का भुज) - (Q का भुज) का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, बिन्दु P का निर्देशांक $(-2, 3)$

$$\therefore P \text{ का भुज} = P \text{ का } x\text{-निर्देशांक} = -2$$

$$\text{तथा बिन्दु } Q \text{ का निर्देशांक} = (-3, 5)$$

$$\therefore Q \text{ का भुज} = Q \text{ का } x\text{-निर्देशांक} = -3$$

$$\therefore (P \text{ का भुज}) - (Q \text{ का भुज}) = -2 - (-3) = -2 + 3 = 1$$

4. बिन्दु $(3, 0)$ और $(0, 4)$ किस अक्ष पर स्थित हैं?

हल बिन्दु $(3, 0)$ के लिए, x -निर्देशांक धनात्मक और y -निर्देशांक शून्य है, अतः यह X -अक्ष पर स्थित है।

बिन्दु $(0, 4)$ के लिए, x -निर्देशांक शून्य तथा y -निर्देशांक धनात्मक है, अतः यह Y -अक्ष पर स्थित है।

5. बिन्दु $(6, 4)$ की X -अक्ष से लाम्बिक दूरी ज्ञात कीजिए।

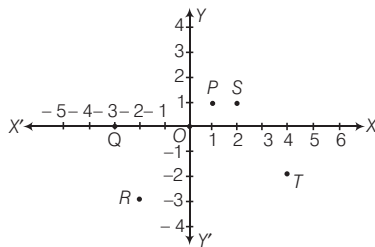
हल बिन्दु $(6, 4)$ की X -अक्ष से लाम्बिक दूरी

$$= \text{बिन्दु } (6, 4) \text{ का } y\text{-निर्देशांक} = 4 \text{ इकाई}$$

6. Y -अक्ष पर स्थित वह बिन्दु, जो X -अक्ष से 3 इकाई की दूरी पर स्थित है, के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल $\therefore Y$ -अक्ष पर स्थित किसी बिन्दु का x -निर्देशांक शून्य होता है। अतः Y -अक्ष पर स्थित वह बिन्दु, जो X -अक्ष से 3 इकाई की दूरी पर स्थित है, के निर्देशांक $(0, 3)$ और $(0, -3)$ हैं।

7. निम्नलिखित आकृति से बिन्दु P, Q, R, S, T और Q, O के निर्देशांक ज्ञात करो।



हल बिन्दु P के लिए,

$$\text{बिन्दु का भुज} = 1 \text{ तथा बिन्दु की कोटि} = 1$$

$$\therefore \text{बिन्दु के निर्देशांक} = (1, 1)$$

बिन्दु Q के लिए,

$$\text{बिन्दु का भुज} = -3 \text{ तथा बिन्दु की कोटि} = 0$$

$$\therefore \text{बिन्दु के निर्देशांक} = (-3, 0)$$

बिन्दु R के लिए,

$$\text{बिन्दु का भुज} = -2 \text{ तथा बिन्दु की कोटि} = -3$$

$$\therefore \text{बिन्दु के निर्देशांक} = (-2, -3)$$

बिन्दु S के लिए,

$$\text{बिन्दु का भुज} = 2 \text{ तथा बिन्दु की कोटि} = 1$$

$$\therefore \text{बिन्दु के निर्देशांक} = (2, 1)$$

बिन्दु T के लिए,

$$\text{बिन्दु का भुज} = 4 \text{ तथा बिन्दु की कोटि} = -2$$

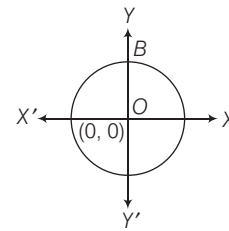
$$\therefore \text{बिन्दु के निर्देशांक} = (4, -2)$$

बिन्दु O के लिए,

$$\text{बिन्दु का भुज} = 0 \text{ तथा बिन्दु की कोटि} = 0$$

$$\therefore \text{बिन्दु के निर्देशांक} = (0, 0)$$

8. दी गई आकृति में, बिन्दु O केन्द्र वाले वृत्त की त्रिज्या 3 इकाई है। यदि बिन्दु O मूलबिन्दु पर स्थित है, तब वृत्त पर स्थित बिन्दु B के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।



हल बिन्दु B वृत्त पर Y -अक्ष पर धनात्मक दिशा में स्थित है जिसकी त्रिज्या 3 इकाई है।

\therefore बिन्दु B के लिए,

$$\text{बिन्दु का भुज} = 0$$

$$\text{तथा बिन्दु की कोटि} = 3$$

$$\therefore \text{बिन्दु के निर्देशांक} = (0, 3)$$

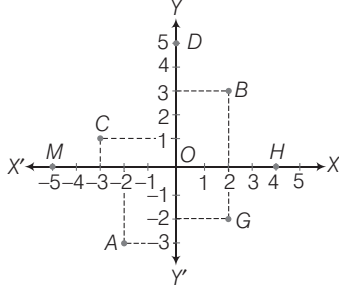
9. एक बिन्दु Y -अक्ष से 5 इकाई दूरी पर X -अक्ष पर स्थित है। इसके निर्देशांक क्या होंगे। यदि वह बिन्दु X -अक्ष से ऋणात्मक दिशा में 5 इकाई दूरी पर, Y -अक्ष पर स्थित हो, तब इसके क्या निर्देशांक होंगे?

हल बिन्दु Y -अक्ष से 5 इकाई दूरी पर X -अक्ष पर स्थित है, अतः इसका भुज = -5, 5 तथा कोटि = 0 इसलिए इसके निर्देशांक (5, 0) और (-5, 0) हैं।

तथा यदि बिन्दु X -अक्ष से ऋणात्मक दिशा में 5 इकाई दूरी पर, Y -अक्ष पर स्थित हो तब इसका भुज = 0 तथा कोटि = -5

∴ इसके निर्देशांक = (0, -5)

10. दिए गए चित्र को देखिए तथा ज्ञात कीजिए



(i) बिन्दु B के निर्देशांक

(ii) वह बिन्दु जिसके निर्देशांक (-2, -3) हैं।

(iii) बिन्दु D का भुज (iv) बिन्दु M की कोटि

(v) वह बिन्दु जिसके समान भुज है

(vi) वह बिन्दु जिसकी समान कोटि है

हल (i) बिन्दु B के लिए, भुज = 5, कोटि = 3

अतः बिन्दु B के निर्देशांक = (2, 3)

(ii) दिया है, भुज = -2, कोटि = -3

अतः उपरोक्त चित्र से, दिए गए निर्देशांक के लिए अभीष्ट बिन्दु A है।

(iii) बिन्दु D का भुज = बिन्दु का x -निर्देशांक = 0

(iv) बिन्दु M की कोटि = बिन्दु का y -निर्देशांक = 0

(v) बिन्दु B का भुज = 2 तथा बिन्दु G का भुज = 2

अतः अभीष्ट बिन्दु B और G हैं।

(vi) बिन्दु M की कोटि = 0

तथा बिन्दु H की कोटि = 0

अतः अभीष्ट बिन्दु M और H हैं।

11. वह बिन्दु किस चतुर्थांश में स्थित होगा, जिसके दोनों निर्देशांक ऋणात्मक हैं?

हल तीसरा चतुर्थांश ऋणात्मक X -अक्ष और ऋणात्मक Y -अक्ष से परिवद्ध है।

12. निम्नलिखित बिन्दु कौन-से चतुर्थांश में स्थित हैं?

(i) (-5, 3) (ii) (4, -6) (iii) (-3, 2)

(iv) (5, 4) (v) (-4, -2) (vi) (1, -3)

(vii) (-2, 4) (viii) (3, 5) (ix) (-3, -5)

हल (i) (-5, 3)

यहाँ, x -निर्देशांक ऋणात्मक तथा y -निर्देशांक धनात्मक है, अतः यह द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है।

(ii) (4, -6)

यहाँ, x -निर्देशांक धनात्मक तथा y -निर्देशांक ऋणात्मक है, अतः यह चतुर्थ चतुर्थांश में स्थित है।

(iii) (-3, 2) द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है।

(iv) (5, 4)

यहाँ, x -निर्देशांक धनात्मक तथा y -निर्देशांक धनात्मक है, अतः यह प्रथम चतुर्थांश में स्थित है।

(v) (-4, -2)

यहाँ, x -निर्देशांक तथा y -निर्देशांक दोनों ऋणात्मक हैं, अतः यह तृतीय चतुर्थांश में स्थित है।

(vi) (1, -3) चतुर्थ चतुर्थांश में स्थित है।

(vii) (-2, 4) द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है।

(viii) (3, 5) प्रथम चतुर्थांश में स्थित है।

(ix) (-3, -5) तृतीय चतुर्थांश में स्थित है।

13. कार्तीय तल पर, उन चार बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो मूलबिन्दु से 5 इकाई दूरी पर स्थित हैं।

हल मूलबिन्दु से 5 इकाई दूरी पर स्थित बिन्दु (-5, 0), (5, 0), (0, 5) तथा (0, -5) हैं।

14. एक पुलिस और एक चोर दोनों ज्वैलरी बॉक्स से समान दूरी पर स्थित हैं। माना यदि ज्वैलरी बॉक्स मूलबिन्दु है तथा पुलिस की स्थिति के निर्देशांक (0, 5) है और चोर की स्थिति के निर्देशांक की कोटि शून्य (0) है, तब चोर की स्थिति ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, ज्वैलरी बॉक्स मूलबिन्दु है तथा ज्वैलरी बॉक्स से पुलिस और चोर समान दूरी पर हैं।

पुलिस की स्थिति के निर्देशांक (0, 5) हैं

∴ चोर की स्थिति में निर्देशांक की कोटि शून्य है।

अतः चोर की स्थिति के निर्देशांक या तो (5, 0) या तो (-5, 0) होंगे।



दो चरों वाले रैखिक समीकरण

1. निम्नलिखित रैखिक समीकरणों को $ax + by + c = 0$ के रूप में व्यक्त कीजिए और प्रत्येक स्थिति में a, b और c के मान बताइए।

(i) $2x + 3y = 5$ (ii) $x = -5 + 3y$

(iii) $\pi y = 2x$ (iv) $y = 9$

हल (i) दिया है, $2x + 3y = 5$

$$\Rightarrow 2x + 3y - 5 = 0$$

उपरोक्त समीकरण की तुलना $ax + by + c = 0$ से करने पर,

$$a = 2, b = 3 \text{ तथा } c = -5$$

(ii) दिया है, $x = -5 + 3y$

$$\Rightarrow x - 3y + 5 = 0$$

उपरोक्त समीकरण की तुलना $ax + by + c = 0$ से करने पर,

$$a = 1, b = -3 \text{ तथा } c = 5$$

(iii) दिया है, $\pi y = 2x$

$$\Rightarrow \pi y - 2x = 0$$

$$\Rightarrow 2x - \pi y + 0c = 0$$

उपरोक्त समीकरण की तुलना $ax + by + c = 0$ से करने पर,

$$a = 2, b = -\pi \text{ तथा } c = 0$$

(iv) दिया है, $y = 9$

$$\Rightarrow y - 9 = 0$$

$$\Rightarrow 0.x + y - 9 = 0$$

उपरोक्त समीकरण की तुलना $ax + by + c = 0$ से करने पर,

$$a = 0, b = 1 \text{ तथा } c = -9$$

2. पुस्तक का मूल्य, पेन के मूल्य के दोगुने से ₹ 20 अधिक है, तब उपरोक्त कथन को रैखिक समीकरण रूप में दर्शाइए।

हल माना पुस्तक का मूल्य = ₹ x

तथा पेन का मूल्य = ₹ y

प्रश्नानुसार, $x = 2y + 20$

3. पाँच वर्ष पूर्व, नूरी की आयु सोनू की आयु की तीन गुना थी। उपरोक्त सूचना को रैखिक समीकरण रूप में व्यक्त कीजिए।

हल माना नूरी की वर्तमान आयु = x वर्ष

तथा सोनू की वर्तमान आयु = y वर्ष

∴ नूरी की पाँच वर्ष पूर्व आयु = $(x - 5)$ वर्ष

तथा सोनू की पाँच वर्ष पूर्व आयु = $(y - 5)$ वर्ष

प्रश्नानुसार, $(x - 5) = 3(y - 5)$

$$\Rightarrow x - 5 = 3y - 15$$

$$\Rightarrow x - 3y - 5 + 15 = 0$$

$$\Rightarrow x - 3y + 10 = 0$$

$$\Rightarrow x - 3y = -10$$

4. यदि हम दिल्ली बस स्टैंड से आगरा के लिए 2 टिकट तथा मथुरा के लिए 3 टिकट खरीदते हैं तब उनकी कुल कीमत ₹ 440 है। इस स्थिति को रैखिक समीकरण के रूप में दर्शाइए।

हल माना दिल्ली बस स्टैंड से आगरा तथा मथुरा का किराया क्रमशः ₹ x तथा ₹ y है।

प्रश्नानुसार, $2x + 3y = 440$

5. किसी संख्या के दोगुने में से 7 घटाने पर 69 प्राप्त होता है, तब उपरोक्त कथन के लिए रैखिक समीकरण लिखिए। साथ ही, इसका एक हल ज्ञात कीजिए तथा बताइए कि समीकरण के कितने हल हो सकते हैं?

हल माना संख्या x है।

तब प्रश्नानुसार, $2x - 7 = 69$

पुनः समीकरण के हल के लिए,

$$2x = 69 + 7 = 76$$

$$\Rightarrow x = \frac{76}{2} = 38$$

यहाँ, समीकरण का केवल एक हल होगा।

6. एक ऑटो रिक्शा के किराए के रूप में पहले किमी के लिए ₹10 तथा उसके बाद की दूरी के लिए प्रति किलोमीटर ₹ 8 हैं। यदि x किमी की दूरी के लिए, ₹ y का किराया दिया गया हो, तो उक्त कथन को निरूपित करने वाला रैखिक समीकरण लिखिए।

हल दिया है, पहले किमी के लिए किराया = ₹ 10

तथा उसके बाद की दूरी के लिए किराया प्रति किमी = ₹ 8

कुल दूरी = x किमी

तथा कुल किराया = ₹ y

प्रश्नानुसार, $10 \times 1 + 8 \times (x - 1) = y$

$$\Rightarrow 10 + 8x - 8 = y$$

$$\Rightarrow 8x + 2 = y$$

$$\Rightarrow y = 8x + 2$$

7. किराये पर पुस्तक देने वाला एक पुस्तकालय पहले तीन दिनों के लिए एक निश्चित शुल्क तथा उसके बाद प्रतिदिन की दर से

अतिरिक्त शुल्क लेता है। आरुषि ने एक पुस्तक के सात दिनों के लिए ₹ 37 दिए। यदि निश्चित शुल्क ₹ x तथा प्रतिदिन का शुल्क ₹ y हो, तो उपयुक्त कथन को निरूपित करने के लिए एक रैखिक समीकरण लिखिए।

हल दिया है, तीन दिनों के लिए निश्चित शुल्क ₹ x तथा प्रतिदिन का शुल्क ₹ y है और सात दिनों का कुल किराया ₹ y है।

प्रश्नानुसार, $x + 4y = 37$

8. यदि अंश में 1 जोड़ दिया जाए तथा हर में से 1 घटा दिया जाए, तब भिन्न 1 प्राप्त होता है, उपरोक्त सूचना के लिए रैखिक समीकरण दर्शाइए।

हल माना अभीष्ट भिन्न $\frac{x}{y}$ है।

प्रश्नानुसार, $\frac{x+1}{y-1} = 1$

$$\Rightarrow x+1 = y-1$$

$$\Rightarrow x - y + 1 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x - y + 2 = 0$$

$$\Rightarrow x - y = -2$$

9. एक चर में रैखिक समीकरण $3x + 7 = 0$ दी गई है, तब इसके कितने हल होंगे?

हल दिया है, $3x + 7 = 0$

$$\Rightarrow 3x = -7$$

$$\Rightarrow x = -\frac{7}{3}$$

अतः दी गई समीकरण का केवल एक हल है।

10. समीकरण $2x + y = 7$ के चार हल बताइए।

हल दी गई समीकरण निम्न है

$$2x + y = 7 \quad \dots(i)$$

समी (i) में $x = 0$ रखने पर,

$$2 \times 0 + y = 7$$

$$\Rightarrow y = 7$$

इसलिए (0, 7) समीकरण का एक हल है।

समी (i) में $x = 1$ रखने पर,

$$2 \times 1 + y = 7$$

$$\Rightarrow 2 + y = 7$$

$$\Rightarrow y = 7 - 2 = 5$$

इसलिए (1, 5) दी गई समीकरण का दूसरा हल है।

समी (i) में $x = 2$ रखने पर,

$$2 \times 2 + y = 7$$

$$\Rightarrow 4 + y = 7$$

$$\Rightarrow y = 7 - 4 = 3$$

इसलिए (2, 3) दी गई समीकरण का तीसरा हल है। समी (i) में $x = -1$ रखने पर,

$$2 \times (-1) + y = 7 \Rightarrow -2 + y = 7$$

$$\Rightarrow y = 7 + 2$$

$$\Rightarrow y = 9$$

इसलिए (-1, 9) दी गई समीकरण का चौथा हल है।

11. समीकरण $x = 2y$ के दो हल लिखिए।

हल दिया है, $x = 2y \quad \dots(i)$

समी (i) में $x = 2$ रखने पर,

$$2 = 2y \Rightarrow y = 1$$

इसलिए (2, 1) दी गई समीकरण का एक हल है।

समी (i) में $x = -4$ रखने पर

$$-4 = 2y \Rightarrow y = -2$$

इसलिए (-4, -2) समीकरण का दूसरा हल है।

12. ज्ञात कीजिए कि $(\sqrt{3}, 0)$ रैखिक समीकरण $3\sqrt{3}x - 3y = 9$ का एक हल है अथवा नहीं।

हल दी गई समीकरण, $3\sqrt{3}x - 3y = 9$

तथा दिया गया बिन्दु $(\sqrt{3}, 0)$ है।

∴ बाएँ पक्ष में $x = \sqrt{3}$ तथा $y = 0$ रखने पर,

$$\text{बायाँ पक्ष} = 3\sqrt{3}(\sqrt{3}) - 3 \times 0$$

$$= 3 \times 3 - 0 = 9 = \text{दायाँ पक्ष}$$

इसलिए $(\sqrt{3}, 0)$ दी गई समीकरण का हल है।

13. जाँच कीजिए कि निम्नलिखित में से कौन-सा रैखिक समीकरण $3y - 2x = 1$ का हल है।

(i) (4, 3) (ii) $(2\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$

हल दिया गया समीकरण निम्न है

$$3y - 2x = 1 \quad \dots(i)$$

(i) (4, 3)

समी (i) में $x = 4$ तथा $y = 3$ रखने पर,

$$\text{बायाँ पक्ष} = 3 \times 3 - 2 \times 4$$

$$= 9 - 8 = 1 = \text{दायाँ पक्ष}$$

इसलिए (4, 3) दी गई समीकरण का हल है।

(ii) $(2\sqrt{2}, 3\sqrt{3})$

समी (i) में $x = 2\sqrt{2}$ तथा $y = 3\sqrt{3}$ रखने पर,

$$3 \times 3\sqrt{3} - 2 \times 2\sqrt{2}$$

$$\text{बायाँ पक्ष} = 9\sqrt{3} - 4\sqrt{2}$$

$$\neq \text{दायाँ पक्ष}$$

इसलिए $(2\sqrt{2}, 3\sqrt{3})$ दिए गए समीकरण का हल नहीं है।

14. यदि $(5, k)$ रैखिक समीकरण $2x + y - 6 = 0$, का हल है, तब k का मान ज्ञात कीजिए।

हल दी गई समीकरण निम्न है

$$2x + y - 6 = 0$$

∴ $(5, k)$ समीकरण का हल है

∴ $x = 5$ तथा $y = k$ समीकरण में रखने पर,

$$2 \times 5 + k - 6 = 0$$

$$\Rightarrow 10 + k - 6 = 0$$

$$\Rightarrow k + 4 = 0$$

$$\Rightarrow k = -4$$

15. निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए a का मान ज्ञात कीजिए, यदि $x = 1$ तथा $y = 1$ इनका हल है

$$(i) x - y = a$$

$$(ii) 3x + ay = 6$$

हल (i) दी गई समीकरण निम्न है

$$x - y = a$$

$\therefore x = 1$ तथा $y = 1$ समीकरण का हल है।

\therefore समीकरण को सन्तुष्ट करेगा।

$$1 - 1 = a \Rightarrow a = 0$$

(ii) दी गई समीकरण निम्न है

$$3x + ay = 6$$

$\therefore x = 1$ तथा $y = 1$ समीकरण का हल है।

\therefore समीकरण को सन्तुष्ट करेगा।

$$3 \times 1 + a \times 1 = 6$$

$$\Rightarrow 3 + a = 6$$

$$\Rightarrow a = 6 - 3 = 3$$

16. एक छात्रावास के मासिक व्यय का एक भाग नियत है तथा शेष इस पर निर्भर करता है कि छात्र ने कितने दिन भोजन लिया है। एक विद्यार्थी A को, जो 20 दिन भोजन करता है, ₹1000 छात्रावास के व्यय के लिए अदा करने पड़ते हैं जबकि एक विद्यार्थी

B को, जो 26 दिन भोजन करता है, छात्रावास के व्यय के लिए ₹1180 अदा करने पड़ते हैं। तब,

(i) उपरोक्त स्थितियों के लिए दो चरों में रैखिक समीकरण बनाइए।

(ii) नियत व्यय और प्रतिदिन के भोजन का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल माना मासिक व्यय का नियत भाग ₹ x तथा प्रतिदिन के भोजन पर व्यय ₹ y है।

तब प्रश्नानुसार,

विद्यार्थी A के लिए,

नियत व्यय + 20 दिन के भोजन पर व्यय = ₹ 1000

$$\Rightarrow x + 20y = 1000 \quad \dots(i)$$

विद्यार्थी B के लिए,

नियत व्यय + 26 दिन के भोजन पर व्यय = ₹ 1180

$$\Rightarrow x + 26y = 1180 \quad \dots(ii)$$

समी (ii) में से समी (i) को घटाने पर,

$$(x + 26y) - (x + 20y) = 1180 - 1000$$

$$\Rightarrow 6y = 180$$

$$\Rightarrow y = \frac{180}{6} = 30$$

y का मान समी (i) में रखने पर,

$$x + 20 \times 30 = 1000$$

$$\Rightarrow x + 600 = 1000$$

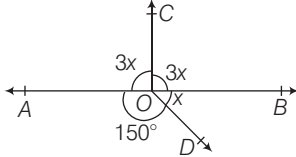
$$\Rightarrow x = 1000 - 600 = 400$$

अतः नियत शुल्क = ₹ 400

तथा प्रतिदिन के भोजन पर व्यय = ₹ 30



1. दी गई आकृति में, x का मान ज्ञात कीजिए।



हल चित्र से, $3x + 3x + 150^\circ + x = 360^\circ$

$$\Rightarrow 7x = 360^\circ - 150^\circ$$

$$\Rightarrow x = \frac{210^\circ}{7} = 30^\circ$$

2. यदि एक कोण का सम्पूरक इसके $\frac{1}{5}$ वें भाग के बराबर है, तो कोण तथा इसका सम्पूरक ज्ञात कीजिए।

हल माना कोण = x

$$\therefore \text{सम्पूरक कोण} = 180^\circ - x$$

$$\text{प्रश्नानुसार, सम्पूरक कोण} = \frac{1}{5} \times \text{कोण}$$

$$\Rightarrow 180^\circ - x = \frac{x}{5}$$

$$\Rightarrow 180^\circ = \frac{x}{5} + x$$

$$\Rightarrow 180^\circ = \frac{6x}{5}$$

$$\Rightarrow x = \frac{180^\circ \times 5}{6} = 150^\circ$$

अतः कोण = 150° तथा सम्पूरक कोण = 30°

3. यदि दो सम्पूरक कोण 11:7 के अनुपात में हैं, तो कोण ज्ञात कीजिए।

हल माना सम्पूरक कोण $11x$ तथा $7x$ हैं।

\therefore सम्पूरक कोणों का योग 180° होता है।

$$\therefore 11x + 7x = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 18x = 180^\circ$$

$$\Rightarrow x = \frac{180^\circ}{18} = 10^\circ$$

अतः अभीष्ट कोण क्रमशः 110° तथा 70° हैं।

4. उस कोण का मान ज्ञात कीजिए जोकि अपने पूरक कोण से 36° अधिक है।

हल माना अभीष्ट कोण = x

$$\therefore \text{पूरक कोण} = 90^\circ - x$$

$$\text{प्रश्नानुसार, } x = 90^\circ - x + 36^\circ$$

$$\Rightarrow x + x = 126^\circ$$

$$\Rightarrow 2x = 126^\circ$$

$$\Rightarrow x = \frac{126^\circ}{2} = 63^\circ$$

5. उस कोण का मान ज्ञात कीजिए जोकि अपने सम्पूरक कोण से 25° कम है।

हल माना अभीष्ट कोण = x

$$\therefore \text{सम्पूरक कोण} = 180^\circ - x$$

$$\text{प्रश्नानुसार, } x = 180^\circ - x - 25^\circ$$

$$\Rightarrow x + x = 155^\circ$$

$$\Rightarrow 2x = 155^\circ$$

$$\Rightarrow x = \frac{155^\circ}{2} = 77.5^\circ$$

6. यदि एक कोण अपने पूरक कोण के चार गुने के बराबर है, तब कोण ज्ञात कीजिए।

हल माना अभीष्ट कोण = x

$$\therefore \text{पूरक कोण} = 90^\circ - x$$

$$\text{प्रश्नानुसार, } x = 4(90^\circ - x)$$

$$\Rightarrow x = 360^\circ - 4x$$

$$\Rightarrow x + 4x = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 5x = 360^\circ$$

$$\Rightarrow x = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

7. यदि एक कोण का पूरक, इसके सम्पूरक का एक-तिहाई है, तब कोण ज्ञात कीजिए।

अथवा

यदि एक कोण का पूरक, इस कोण के तीन गुने के सम्पूरक के बराबर है, तब कोण की माप ज्ञात कीजिए।

हल माना अभीष्ट कोण = x

$$\therefore \text{पूरक कोण} = 90^\circ - x$$

$$\text{तथा सम्पूरक कोण} = 180^\circ - x$$

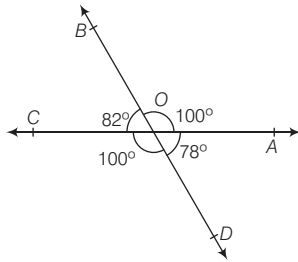
$$\text{प्रश्नानुसार, पूरक कोण} = \frac{1}{3} \times \text{सम्पूरक कोण}$$

$$\Rightarrow 90^\circ - x = \frac{1}{3} \times (180^\circ - x)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 270^\circ - 3x &= 180^\circ - x \\ \Rightarrow 270^\circ - 180^\circ &= -x + 3x \\ \Rightarrow 90^\circ &= 2x \\ \Rightarrow x &= \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ \end{aligned}$$

8. यदि OA, OB, OC तथा OD किरणें वामावर्त दिशा में इस प्रकार हैं कि $\angle AOB = \angle COD = 100^\circ$, $\angle BOC = 82^\circ$ तथा $\angle AOD = 78^\circ$ हैं, तब क्या यह कहना सत्य है कि AOC तथा BOD रेखाएँ हैं।

हल दिया है, $\angle AOB = \angle COD = 100^\circ$



$$\angle BOC = 82^\circ, \angle AOD = 78^\circ$$

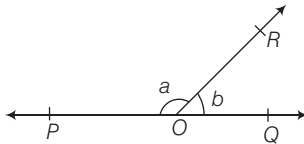
$$\therefore \angle AOC = \angle AOB + \angle BOC = 100^\circ + 82^\circ = 182^\circ$$

$$\text{तथा } \angle BOD = \angle BOC + \angle COD = 82^\circ + 100^\circ = 182^\circ$$

$$\therefore \angle AOC \neq 180^\circ \text{ तथा } \angle BOD \neq 180^\circ$$

$\therefore AOC$ तथा BOD सरल रेखाएँ नहीं हैं।

9. दी गई आकृति में, $\angle POR$ तथा $\angle QOR$ रैखिक युग्म बनाते हैं तथा $a - b = 80^\circ$ है, तब a तथा b के मान ज्ञात कीजिए।



हल दिया है, $\angle POR$ तथा $\angle QOR$ रैखिक युग्म बनाते हैं।

$$\therefore \angle POR + \angle QOR = 180^\circ$$

$$\Rightarrow a + b = 180^\circ \quad \dots(i)$$

$$\text{प्रश्नानुसार, } a - b = 80^\circ \quad \dots(ii)$$

समी (i) तथा (ii) को जोड़ने पर,

$$2a = 260^\circ$$

$$\Rightarrow a = \frac{260^\circ}{2} = 130^\circ$$

a का मान समी (i) में रखने पर, $b = 50^\circ$

10. यदि कोण a तथा b कोणों के रैखिक युग्म बनाते हैं तथा $a - 2b = 30^\circ$ है, तब a तथा b के मान ज्ञात कीजिए।

हल \therefore कोण a तथा b कोणों के रैखिक युग्म बनाते हैं।

$$\therefore a + b = 180^\circ \quad \dots(i)$$

$$\text{तथा } a - 2b = 30^\circ \quad [\text{प्रश्न से}] \dots(ii)$$

समी (i) से समी (ii) को घटाने पर,

$$3b = 150^\circ$$

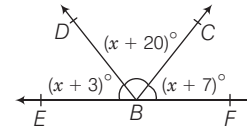
$$\Rightarrow b = \frac{150^\circ}{3} \Rightarrow b = 50^\circ$$

b का मान समी (i) में रखने पर,

$$a = 130^\circ$$

अतः $a = 130^\circ$ तथा $b = 50^\circ$

11. दी गई आकृति में, x का मान ज्ञात कीजिए।



हल चित्र से,

$$(x + 3)^\circ + (x + 20)^\circ + (x + 7)^\circ = 180^\circ$$

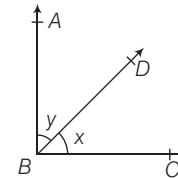
$$\Rightarrow 3x + 30^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 3x = 180^\circ - 30^\circ$$

$$\Rightarrow 3x = 150^\circ$$

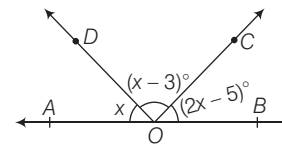
$$\Rightarrow x = \frac{150^\circ}{3} = 50^\circ$$

12. दी गई आकृति में, $x + y$ के किस मान के लिए ABC एक सरल रेखा होगी? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।



हल दी गई आकृति में, यदि $x + y = 180^\circ$, तब ABC एक सरल रेखा होगी, क्योंकि 180° के कोण पर बिन्दु A, B तथा C एक सरल पथ में होंगे।

13. दी गई आकृति में, यदि AOB एक सरल रेखा है, तब x का मान ज्ञात कीजिए।



हल चित्र से, AOB सरल रेखा है।

$$\therefore x + (x - 3)^\circ + (2x - 5)^\circ = 180^\circ$$

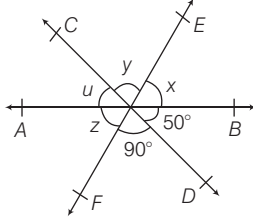
$$\Rightarrow 4x - 8^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 4x = 180^\circ + 8^\circ$$

$$\Rightarrow 4x = 188^\circ$$

$$\Rightarrow x = \frac{188^\circ}{4} = 47^\circ$$

14. तीन रेखाएँ AB, CD तथा EF परस्पर बिन्दु ' O ' पर मिलकर चित्रानुसार कोण बनाती हैं, तब x, y, z तथा u के मान ज्ञात कीजिए।



हल चित्र से, EF एक सरल रेखा है।

$$\therefore x + 50^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow x = 180^\circ - 140^\circ$$

$$\Rightarrow x = 40^\circ$$

$$\text{और } y = 90^\circ \quad [\text{शीर्षाभिमुख कोण}]$$

$$z = x \quad [\text{शीर्षाभिमुख कोण}]$$

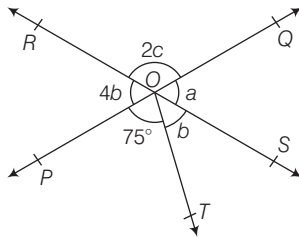
$$\therefore z = 40^\circ$$

$$\text{तथा } u = 50^\circ \quad [\text{शीर्षाभिमुख कोण}]$$

$$\text{अतः } x = 40^\circ, y = 90^\circ, z = 40^\circ$$

$$\text{तथा } u = 50^\circ$$

15. दी गई आकृति में, दो सरल रेखाएँ PQ और RS परस्पर बिन्दु ' O ' पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि $\angle POT = 75^\circ$ है, तब a, b तथा c के मान ज्ञात कीजिए।



हल चित्र से, PQ एक सरल रेखा है।

$$\therefore a + b + 75^\circ = 180^\circ \quad [\text{रैखिक युग्म कोण}]$$

$$\Rightarrow a + b = 180^\circ - 75^\circ$$

$$\Rightarrow a + b = 105^\circ \quad \dots(i)$$

$$a = 4b \quad \dots(ii)$$

[शीर्षाभिमुख कोण]

तथा RS भी एक सरल रेखा है।

$$\therefore a + 2c = 180^\circ \quad \dots(iii)$$

[रैखिक युग्म कोण]

समी (i) तथा समी (ii) से,

$$4b + b = 105^\circ$$

$$\Rightarrow 5b = 105^\circ$$

$$\Rightarrow b = \frac{105^\circ}{5} = 21^\circ$$

b का मान समी (ii) में रखने पर, $a = 84^\circ$

अब, a का मान समी (iii) में रखने पर,

$$84^\circ + 2c = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2c = 180^\circ - 84^\circ$$

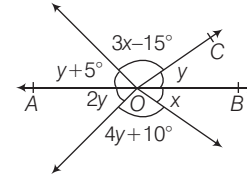
$$\Rightarrow 2c = 96^\circ$$

$$\Rightarrow c = \frac{96^\circ}{2} = 48^\circ$$

$$\text{अतः } a = 84^\circ, b = 21^\circ$$

$$\text{तथा } c = 48^\circ$$

16. दी गई आकृति में, यदि $y = 20^\circ$ है, तब सिद्ध कीजिए कि AOB एक सरल रेखा है।



हल दी गई आकृति में, $y = 20^\circ$

$$\text{तथा } y + 3x - 15^\circ + y + 5^\circ + 2y + 4y + 10^\circ + x = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 4x + 8y = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 4x + 8(20^\circ) = 360^\circ \quad [:\because y = 20^\circ]$$

$$\Rightarrow 4x = 360^\circ - 160^\circ$$

$$\Rightarrow 4x = 200^\circ$$

$$\Rightarrow x = \frac{200^\circ}{4} = 50^\circ$$

$$\text{अब, } \angle AOB = y + 5^\circ + 3x - 15^\circ + y$$

$$= 3x + 2y - 10^\circ$$

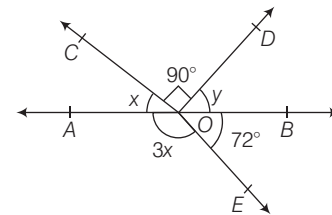
$$= 3(50^\circ) + 2(20^\circ) - 10^\circ$$

$$= 150^\circ + 40^\circ - 10^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore \angle AOB = 180^\circ$$

$\therefore AOB$ एक सरल रेखा है।

17. दी गई आकृति में, y का मान ज्ञात कीजिए।



हल दी गई आकृति में, AOB एक सरल रेखा है।

$$\therefore \angle AOE + \angle BOE = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 3x + 72^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 3x = 180^\circ - 72^\circ$$

$$\Rightarrow x = \frac{108^\circ}{3} = 36^\circ$$

$$\text{तथा } \angle AOC + \angle COD + \angle DOB = 180^\circ$$

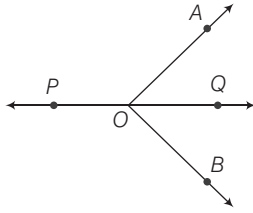
$$\Rightarrow x + 90^\circ + y = 180^\circ$$

$$\Rightarrow x + y = 180^\circ - 90^\circ$$

$$\Rightarrow 36^\circ + y = 90^\circ \quad [x \text{ का मान रखने पर}]$$

$$\Rightarrow y = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$$

18. दी गई आकृति में, OQ , $\angle AOB$ को समद्विभाजित करती है। यदि OP , किरण OQ के विपरीत किरण है, तो सिद्ध कीजिए कि $\angle POA = \angle POB$



हल दी गई आकृति में, OQ , $\angle AOB$ को समद्विभाजित करती है।

$$\therefore \angle AOQ = \angle BOQ \quad \dots(i)$$

तथा OP , किरण OQ के विपरीत किरण है।

$$\therefore \angle POA + \angle AOQ = 180^\circ$$

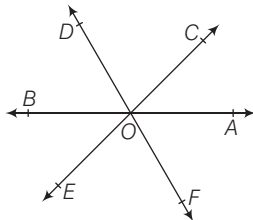
$$\Rightarrow \angle POA = 180^\circ - \angle AOQ$$

$$\Rightarrow \angle POA = 180^\circ - \angle BOQ \quad [\text{समी (i) से}]$$

$$\Rightarrow \angle POA = \angle POB \quad \text{इति सिद्धम्}$$

19. सिद्ध कीजिए कि किसी दिए गए बिन्दु के एक ही तरफ बनने वाले सभी कोणों का योगफल 180° होता है।

हल



माना AB, CE तथा DF रेखाएँ बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करती हैं। बिन्दु O के एक तरफ बिन्दु C, D तथा दूसरी तरफ बिन्दु E, F हैं।

सिद्ध करना है

$$\angle AOC + \angle COD + \angle DOB = 180^\circ$$

$$\text{अब, } \angle AOC = \angle BOE \quad [\text{शीर्षाभिमुख कोण}]$$

$$\angle COD = \angle EOF \quad [\text{शीर्षाभिमुख कोण}]$$

$$\angle DOB = \angle AOF \quad [\text{शीर्षाभिमुख कोण}]$$

... (i)

\therefore किसी बिन्दु पर बने चारों तरफ सभी कोणों का योग 360° होता है।

$$\therefore \angle AOC + \angle COD + \angle DOB + \angle BOE + \angle EOF + \angle AOF = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \angle AOC + \angle COD + \angle DOB + \angle AOC$$

$$+ \angle COD + \angle DOB = 360^\circ$$

[समी (i) से]

$$\Rightarrow 2(\angle AOC + \angle COD + \angle DOB) = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \angle AOC + \angle COD + \angle DOB = 180^\circ$$

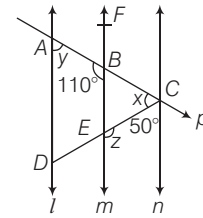
अतः एक बिन्दु के एक तरफ बने सभी कोणों का योग 180° होता है। इति सिद्धम्

20. सिद्ध करें, यदि दो रेखाएँ एक-दूसरे को प्रतिच्छेद करती हैं, तब शीर्षाभिमुख कोण बराबर होते हैं।

हल पाठ्यपुस्तक के पृष्ठ 82 पर प्रमेय 1 देखें।

प्रश्नावली 6.2

1. दी गई आकृति में, $l \parallel m \parallel n$ तथा एक तिर्यक रेखा P उपरोक्त रेखाओं को प्रतिच्छेद करती है, तब x, y तथा z के मान ज्ञात कीजिए।



हल दी गई आकृति में, $y + 110^\circ = 180^\circ$

$$\Rightarrow y = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

$$\text{तथा } z + 50^\circ = 180^\circ$$

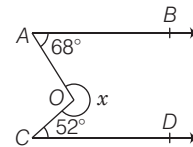
$$\Rightarrow z = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

$$\text{और } x + 50^\circ = 110^\circ$$

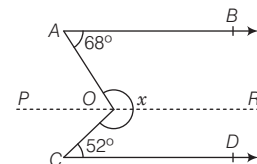
$$\Rightarrow x = 110^\circ - 50^\circ = 60^\circ$$

अतः $x = 60^\circ, y = 70^\circ$ तथा $z = 130^\circ$

2. दी गई आकृति में, $AB \parallel CD$ है। यदि $\angle BAO = 68^\circ$ तथा $\angle OCD = 52^\circ$, तब x का मान ज्ञात कीजिए।



हल दी गई आकृति में, AB, CD के समान्तर रेखा POR खींचने पर,



$$\angle POA = \angle BAO = 68^\circ$$

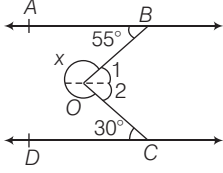
$$\angle POC = \angle OCD = 52^\circ$$

$$\therefore x = 360^\circ - (\angle POA + \angle POC)$$

$$= 360^\circ - (68^\circ + 52^\circ)$$

$$= 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$$

3. दी गई आकृति में, $AB \parallel CD$ है, तब x का मान ज्ञात कीजिए।



हल दी गई आकृति में, $\angle 1 = 55^\circ$

तथा

$$\angle 2 = 30^\circ$$

\therefore

$$x = 360^\circ - (\angle 1 + \angle 2)$$

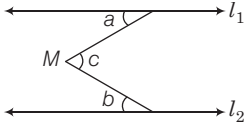
\Rightarrow

$$x = 360^\circ - (55^\circ + 30^\circ)$$

\Rightarrow

$$x = 360^\circ - 85^\circ = 275^\circ$$

4. दी गई आकृति में, c का मान ज्ञात कीजिए, यदि a, b का दो-तिहाई है जोकि 45° का पूरक है।



हल प्रश्नानुसार,

$$a = \frac{2}{3} b$$

तथा

$$b = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

\therefore

$$a = \frac{2}{3} \times 45^\circ = 30^\circ$$

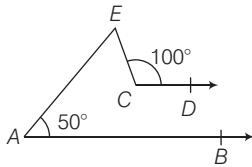
दी गई आकृति से,

$$c = a + b$$

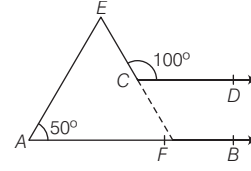
\Rightarrow

$$c = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$$

5. दी गई आकृति में, $AB \parallel CD$ तथा यदि $\angle ECD = 100^\circ$ तथा $\angle BAE = 50^\circ$ है, तब $\angle AEC$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल दी गई आकृति में, EC को AB तक आगे F तक बढ़ाने पर,



अब, $\angle BFC = \angle ECD = 100^\circ$

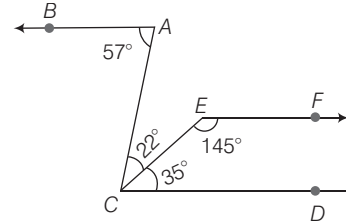
$\therefore \angle EFA = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

$\triangle EAF$ के तीनों कोणों का योग 180° होगा।

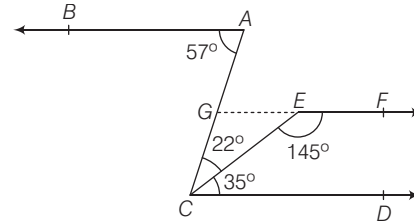
$\therefore \angle AEC = 180^\circ - (50^\circ + 80^\circ)$

$= 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$

6. दी गई आकृति में, दर्शाइए कि $AB \parallel EF$ है।



हल दी आकृति में, EF को AC तक बिन्दु G तक मिलाने पर,



$$\angle GEC = 180^\circ - 145^\circ = 35^\circ$$

$\therefore EF \parallel CD$... (i)

$\therefore \angle BAC = \angle DCA = 57^\circ$

$\therefore AB \parallel CD$... (ii)

समी (i) तथा (ii) से,

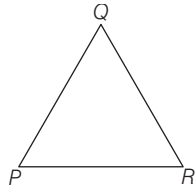
$$AB \parallel EF$$

इति सिद्धम्



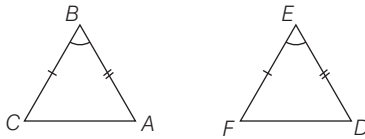
1. ΔPQR में, यदि $\angle R = \angle P$, $QR = 4$ सेमी तथा $PR = 5$ सेमी, तब PQ की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल ΔPQR में, $QR = 4$ सेमी, $PR = 5$ सेमी



- $\therefore \angle R = \angle P$
 $\therefore PQ = QR$
 [\because बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं]
 $\therefore PQ = 4$ सेमी

2. दिए गए चित्र में, $AB = DE$, $BC = EF$ तथा $\angle ABC = \angle DEF$ हैं, तब दोनों त्रिभुजों में क्या सम्भव सम्बन्ध है?



हल ΔABC तथा ΔDEF में,

$$AB = DE$$

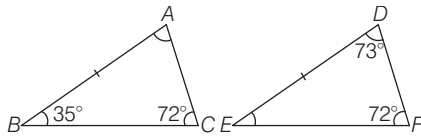
$$BC = EF$$

$$\angle ABC = \angle DEF$$

- $\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEF$ [SAS सर्वांगसमता नियम से]

अतः दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं।

3. दिए गए चित्र में (आकृति में), कौन-से नियम से $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ है?



हल ΔABC तथा ΔDEF में,

$$\angle A = \angle D$$

$$AB = DE$$

$$\angle B = \angle E$$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEF$ [ASA सर्वांगसमता नियम से]

या

$$AB = DE$$

$$\angle A = \angle D$$

$$\angle C = \angle F$$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEF$

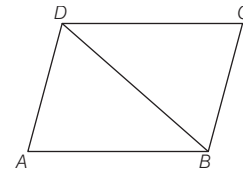
[AAS सर्वांगसमता नियम से]

अतः $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ के लिए,

ASA सर्वांगसमता नियम या AAS सर्वांगसमता नियम है।

4. यदि $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है, तब सिद्ध कीजिए कि ΔABD , ΔCDB के सर्वांगसम हैं।

हल $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है जिसमें विकर्ण BD इसे ΔABD और ΔCDB में विभाजित करता है।



ΔABD तथा ΔCDB में,

$$AD = CB$$

[समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ]

$$\angle DAB = \angle BCD$$

[समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण]

$$AB = CD$$

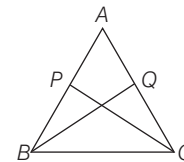
[समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ]

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta CDB$

[SAS सर्वांगसमता नियम से]

इति सिद्धम्

5. आकृति में, ΔABC की समान भुजाओं AB और AC पर दो बिन्दु P और Q इस प्रकार हैं कि $AP = AQ$ है। सिद्ध कीजिए कि $CP = BQ$ है।



हल दी गई आकृति में, $AB = AC$, $AP = AQ$

अब, ΔAQB तथा ΔAPC में,

$$AB = AC$$

[दिया है]

$$\angle A = \angle A$$

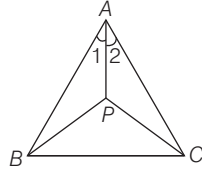
[उभयनिष्ठ]

$$AQ = AP$$

[दिया है]

∴ $\triangle AQB \cong \triangle APC$ [SAS सर्वांगसमता नियम से]
 तब, $CP = BQ$ इति सिद्धम्

6. आकृति में, यदि $AB = AC$ तथा $\angle 1 = \angle 2$, तब सिद्ध कीजिए कि $\angle PBC = \angle PCB$



हल $\triangle APB$ तथा $\triangle APC$ में,

$AB = AC$ [दिया है]
 $\angle 1 = \angle 2$ [दिया है]
 $AP = AP$ [उभयनिष्ठ]

∴ $\triangle APB \cong \triangle APC$
 तब, $\angle ABP = \angle ACP$ [CPCT से] ... (i)

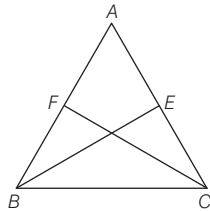
∴ $\triangle ABC$ में,

$AB = AC$
 ∴ $\angle ABC = \angle ACB$... (ii)
 [∵ बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं]

समी (ii) में से समी (i) को घटाने पर,
 $\angle ABC - \angle ABP = \angle ACB - \angle ACP$
 $\Rightarrow \angle PBC = \angle PCB$ इति सिद्धम्

7. $\triangle ABC$ की समान भुजाएँ AB तथा AC के मध्य-बिन्दु क्रमशः E तथा F हैं, तब दर्शाइए कि $BF = CE$

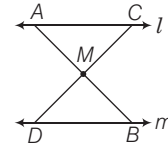
हल $\triangle BFC$ तथा $\triangle CEB$ में,



$FC = EB$
 [∵ F और E , AC और AB के मध्य-बिन्दु हैं]
 $\angle FBC = \angle ECB$ [∵ $AB = AC$]
 $BC = BC$ [उभयनिष्ठ]

∴ $\triangle BFC \cong \triangle CEB$ [SAS सर्वांगसमता नियम से]
 तब, $BF = CE$ [CPCT से]
 इति सिद्धम्

8. दी गई आकृति में, $l \parallel m$ तथा M रेखाखण्ड AB का मध्य-बिन्दु है। दर्शाइए कि M , अन्य रेखा CD जिसके अन्तिम बिन्दु क्रमशः l तथा m पर हैं, का मध्य-बिन्दु हैं।



हल दी गई आकृति में, M रेखाखण्ड AB का मध्य-बिन्दु है।

∴ $AM = BM$... (i)

$\triangle AMC$ तथा $\triangle DMB$ में,

$\angle CAM = \angle DBM$ [∵ $l \parallel m$]

$AM = BM$ [समी (i) से]

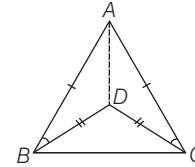
$\angle AMC = \angle DMB$ [शीर्षाभिमुख कोण]

∴ $\triangle AMC \cong \triangle DMB$ [ASA सर्वांगसमता नियम से]

तब, $CM = DM$

अतः M , रेखा CD का मध्य-बिन्दु है। इति सिद्धम्

9. दी गई आकृति में, यदि $AB = AC$ तथा $DB = DC$, तब $\angle ABD$ का $\angle ACD$ से अनुपात ज्ञात कीजिए।



हल दी गई आकृति में, $AB = AC$ तथा $DB = DC$

अब, $\triangle ADB$ तथा $\triangle ADC$ में,

$AB = AC$ [दिया है]

$DB = DC$ [दिया है]

$AD = AD$ [उभयनिष्ठ]

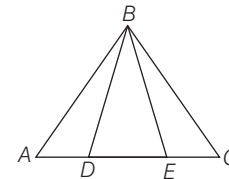
∴ $\triangle ADB \cong \triangle ADC$ [SSS सर्वांगसमता नियम से]

तब, $\angle ABD = \angle ACD$ [CPCT से]

∴ $\frac{\angle ABD}{\angle ACD} = \frac{1}{1}$

$\Rightarrow \angle ABD : \angle ACD = 1 : 1$

10. दी गई आकृति में, यदि $AB = BC$ तथा $AD = EC$, तब दर्शाइए कि $\triangle ABE \cong \triangle CBD$



हल दी गई आकृति में,

$AB = BC$, $AD = EC$

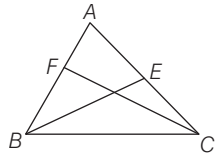
$\triangle ABD$ तथा $\triangle CBE$ में,

$AB = BC$ [दिया है]

$AD = EC$ [दिया है]

$\angle BAD = \angle BCE$ $[\because AB = BC]$
 $\therefore \triangle ABD \cong \triangle CBE$ [SAS सर्वांगसमता नियम से]
 तब, $BD = BE$ [CPCT से] ... (i)
 अब, $\triangle ABE$ तथा $\triangle CBD$ में,
 $AB = BC$ [दिया है]
 $BD = BE$ [समी (i) से]
 $\angle BAE = \angle BCD$ $[\because AB = AC]$
 $\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBD$ [ASS सर्वांगसमता नियम से]
 इति सिद्धम्

11. दिए गए चित्र में, $AB = AC$ और BE तथा CF क्रमशः $\angle B$ तथा $\angle C$ के समद्विभाजक हैं; सिद्ध कीजिए कि $\triangle EBC \cong \triangle FCB$



हल $\triangle ABC$ में, $AB = AC$
 $\therefore \angle ABC = \angle ACB$
 या $\angle FBC = \angle ECB$... (i)
 $\because BE$ तथा CF क्रमशः $\angle B$ तथा $\angle C$ के समद्विभाजक हैं।
 $\therefore \angle EBC = \angle FCB$... (ii)
 $[\because \angle ABC = \angle ACB]$
 अब, $\triangle EBC$ तथा $\triangle FCB$ में,
 $\angle ECB = \angle FBC$ [समी (i) से]
 $\angle EBC = \angle FCB$ [समी (ii) से]
 $BC = BC$ [उभयनिष्ठ]
 $\therefore \triangle EBC \cong \triangle FCB$ [ASA सर्वांगसमता नियम से]
 इति सिद्धम्

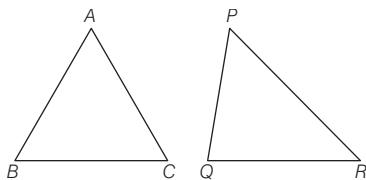
12. $\triangle PQR$ में, X तथा Y क्रमशः PQ तथा QR के बिन्दु हैं। यदि $PQ = QR$ तथा $QX = QY$ है, दर्शाइए कि $PX = RY$ ।

हल पाठ्यपुस्तक के उदाहरण 14 की भाँति स्वयं हल करें।

13. $\triangle ABC$ तथा $\triangle PQR$ में, $\angle A = \angle Q$ तथा $\angle B = \angle R$, $\triangle PQR$ की कौन-सी भुजा, $\triangle ABC$ की भुजा BC के बराबर होनी चाहिए, ताकि दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हो जाएँ? अपने उत्तर का कारण भी दीजिए। (NCERT Exemplar)

हल $\triangle ABC$ तथा $\triangle PQR$ में,

$$\angle A = \angle Q \text{ तथा } \angle B = \angle R$$



तब, ASA सर्वांगसमता नियम के लिए,

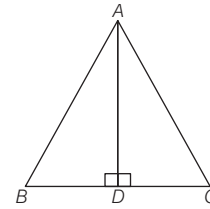
$AB = QR$
 तथा AAS सर्वांगसमता नियम के लिए,
 $BC = RP$

अतः $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ के लिए, $BC = RP$ होनी चाहिए अन्यथा सर्वांगसमता नियम लागू नहीं होगा।

14. यदि त्रिभुज के एक शीर्ष से, शीर्षलम्ब विपरीत भुजा को समद्विभाजित करता है, तब सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज समद्विबाहु है।

हल माना एक $\triangle ABC$ में, शीर्ष A से BC पर लम्ब AD है तथा

$$BD = CD$$



$\triangle ABD$ तथा $\triangle ACD$ में,

$$BD = CD$$

[दिया है]

$$\angle ADB = \angle ADC$$

[प्रत्येक 90°]

$$AD = AD$$

[उभयनिष्ठ]

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD$

तब,

$$AB = AC$$

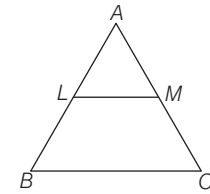
[CPCT से]

अतः $\triangle ABC$ समद्विबाहु है।

इति सिद्धम्

15. $\triangle ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AB = AC$ तथा LM, BC के समान्तर है। यदि $\angle A = 60^\circ$, $\angle LMC$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\triangle ABC$ समद्विबाहु है, जिसमें $AB = AC$



$$\therefore \angle B = \angle C$$

... (i)

$$\therefore \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 60^\circ + \angle B + \angle B = 180^\circ \quad [\text{समी (i) से तथा } A = 60^\circ]$$

$$\Rightarrow 2\angle B = 180^\circ - 60^\circ$$

$$\Rightarrow \angle B = \frac{120^\circ}{2}$$

$$\Rightarrow \angle B = 60^\circ$$

$$\text{तथा } \angle C = 60^\circ$$

$$\therefore LM \parallel BC$$

$$\therefore \angle LMA = \angle BCA$$

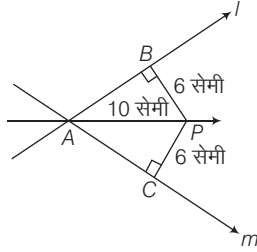
[संगत कोण]

$$\Rightarrow \angle LMA = 60^\circ$$

अब, $\angle LMC = 180^\circ - \angle LMA$ [रैखिक युग्म अभिगृहीत से]
 $= 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

प्रश्नावली 7.2

1. दी गई आकृति में, दो प्रतिच्छेदी रेखाएँ जो बिन्दु A पर प्रतिच्छेद करती हैं, से बिन्दु P समान दूरी पर है। सिद्ध कीजिए कि $\triangle ABP$ तथा $\triangle ACP$ सर्वांगसम हैं तथा AC की लम्बाई 8 सेमी है।



हल समकोण $\triangle ABP$ में,

$$AP^2 = AB^2 + BP^2$$

$$\Rightarrow 100 = AB^2 + 36$$

$$\Rightarrow AB^2 = 100 - 36 \Rightarrow AB^2 = 64$$

$$\Rightarrow AB = 8 \text{ सेमी}$$

समकोण $\triangle ACP$ में,

$$AP^2 = AC^2 + CP^2$$

$$\Rightarrow 100 = AC^2 + 36$$

$$\Rightarrow AC^2 = 64$$

$$\Rightarrow AC = 8 \text{ सेमी}$$

अब, $\triangle ABP$ तथा $\triangle ACP$ में,

$$AB = AC \quad [\text{प्रत्येक } 8 \text{ सेमी}]$$

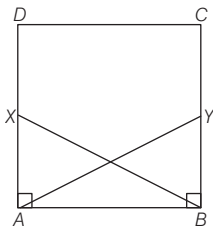
$$AP = AP \quad [\text{उभयनिष्ठ}]$$

$$BP = CP \quad [\text{प्रत्येक } 6 \text{ सेमी}]$$

$\therefore \triangle ABP \cong \triangle ACP$ [SSS सर्वांगसमता नियम से]

2. ABCD एक वर्ग है, X तथा Y क्रमशः भुजाओं AD तथा BC पर बिन्दु इस प्रकार हैं कि $AY = BX$ । सिद्ध कीजिए कि $BY = AX$ तथा $\angle BAY = \angle ABX$ ।

हल $\triangle XAB$ तथा $\triangle YBA$ में,



$$\angle BAX = \angle ABY \quad [\text{प्रत्येक } 90^\circ]$$

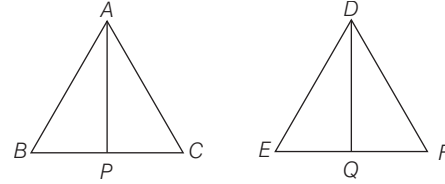
$$BX = AY \quad [\text{दिया है}]$$

$$AB = AB \quad [\text{उभयनिष्ठ}]$$

$$\therefore \triangle XAB \cong \triangle YBA \quad [\text{RHS सर्वांगसमता नियम से}]$$

तब, $BY = AX$ [CPCT से]
 तथा $\angle BAX = \angle ABX$ इति सिद्धम्

3. दी गई आकृति में, $AB = DE$, $BC = EF$ तथा माध्यिका $AP =$ माध्यिका DQ , सिद्ध कीजिए कि $\angle B = \angle E$



हल $\triangle APB$ तथा $\triangle DQE$ में,

$$AB = DE \quad [\text{दिया है}]$$

$$AP = DQ \quad [\text{दिया है}]$$

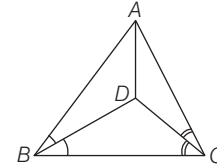
$$BP = EQ$$

[$\because BC = EF$ और P, Q मध्य-बिन्दु होंगे]

$\therefore \triangle APB \cong \triangle DQE$ [SSS सर्वांगसमता प्रमेय से]

तब, $\angle B = \angle E$ [CPCT से] इति सिद्धम्

4. दी गई आकृति में, $AB = AC$, $\triangle ABC$ में अन्तः बिन्दु D इस प्रकार है कि $\angle DBC = \angle DCB$ । सिद्ध कीजिए कि भुजा AD, $\triangle ABC$ के कोण $\angle BAC$ को समद्विभाजित करता है।



हल दी गई आकृति में,

$$\triangle ABC \text{ में, } AB = AC$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB \quad \dots(i)$$

$\triangle ADB$ तथा $\triangle ADC$ में,

$$AB = AC \quad [\text{दिया है}]$$

$$AD = AD \quad [\text{उभयनिष्ठ}]$$

$$\angle DBA = \angle DCA$$

[$\because \angle DBC = \angle DCB$ दिया है, तथा समी (i) से]

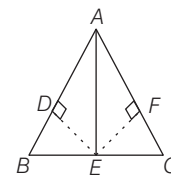
$\therefore \triangle ADB = \triangle ADC$ [SSA सर्वांगसमता नियम से]

तब, $\angle BAD = \angle CAD$

अतः AD, $\triangle ABC$ के $\angle BAC$ को समद्विभाजित करता है।

इति सिद्धम्

5. दी गई आकृति में, $DE = EF$, $BE = EC$, $ED \perp AB$ तथा $EF \perp AC$ है। सिद्ध कीजिए कि $AB = AC$



हल $\triangle ADE$ तथा $\triangle AFE$ में,

$$DE = EF \quad [\text{दिया है}]$$

$$AE = AE \quad [\text{उभयनिष्ठ}]$$

$$\angle ADE = \angle AFE \quad [\text{प्रत्येक } 90^\circ]$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle AFE \quad [\text{RHS सर्वांगसमता नियम से}]$$

$$\text{तब, } AD = AF \quad [\text{CPCT से}] \dots(i)$$

अब, $\triangle BDE$ तथा $\triangle CFE$ में,

$$DE = EF \quad [\text{दिया है}]$$

$$BE = EC \quad [\text{दिया है}]$$

$$\angle BDE = \angle CFE \quad [\text{प्रत्येक } 90^\circ]$$

$$\therefore \triangle BDE \cong \triangle CFE$$

$$\text{तब, } BD = CF \quad [\text{CPCT से}] \dots(ii)$$

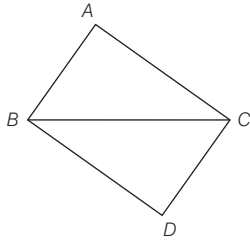
समी (i) तथा (ii) को जोड़ने पर,

$$AD + BD = AF + CF$$

$$\Rightarrow AB = AC \quad \text{इति सिद्धम्}$$

6. $\triangle ABC$ तथा $\triangle DBC$ दो समद्विबाहु त्रिभुज हैं जिनका समान आधार BC है। दर्शाइए कि $\angle ABD = \angle ACD$

हल $\because \triangle ABC$ तथा $\triangle DBC$ समद्विबाहु है।



$$\text{माना } AB = CD \text{ तथा } AC = BD \quad \dots(i)$$

$\triangle ABC$ तथा $\triangle DBC$ में,

$$AB = CD \quad [\text{समी (i) से}]$$

$$AC = BD \quad [\text{समी (i) से}]$$

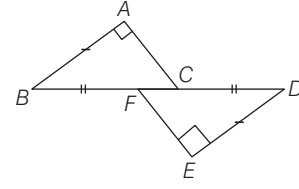
$$BC = BC \quad [\text{उभयनिष्ठ}]$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DBC \quad [\text{SSS सर्वांगसमता नियम से}]$$

$$\text{तब, } \left. \begin{array}{l} \angle ACB = \angle DBC \\ \angle ABC = \angle DCB \end{array} \right\} \quad [\text{CPCT से}] \dots(ii)$$

$$\begin{aligned} \text{अब, } \angle ABD &= \angle ABC + \angle DBC \\ &= \angle DCB + \angle ACB \quad [\text{समी (ii) से}] \\ &= \angle ACD \quad \text{इति सिद्धम्} \end{aligned}$$

7. दी गई आकृति में, $BA \perp AC$ तथा $DE \perp EF$ इस प्रकार हैं कि $BA = DE$ तथा $BF = DC$ । सिद्ध कीजिए कि $AC = EF$



हल दी गई आकृति में,

$$BA = DE \quad [\text{दिया है}] \dots(i)$$

$$\text{तथा } BF = DC \quad [\text{दिया है}]$$

$$\Rightarrow BC - CF = DF - CF \quad [\text{चित्र से}]$$

$$\Rightarrow BC = DF \quad \dots(ii)$$

अब, $\triangle ABC$ तथा $\triangle EDF$ में,

$$BA = DE \quad [\text{समी (i) से}]$$

$$BC = DF \quad [\text{समी (ii) से}]$$

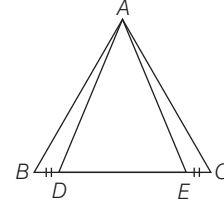
$$\angle BAC = \angle DEF \quad [\text{प्रत्येक } 90^\circ]$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle EDF \quad [\text{RHS सर्वांगसमता नियम से}]$$

$$\text{तब, } AC = EF \quad [\text{CPCT से}]$$

इति सिद्धम्

8. दी गई आकृति में, $AD = AE$ तथा $BD = EC$ । सिद्ध कीजिए कि $AB = AC$



$$\text{हल } \triangle ADE \text{ में, } AD = AE$$

$$\therefore \angle ADE = \angle AED \quad \dots(i)$$

$$\text{अब, } \angle ADB + \angle ADE = 180^\circ \quad [\text{रैखिक युग्म}] \dots(ii)$$

$$\text{तथा } \angle AED + \angle AEC = 180^\circ \quad [\text{रैखिक युग्म}] \dots(iii)$$

समी (ii) तथा (iii) से,

$$\angle ADB + \angle ADE = \angle AED + \angle AEC$$

$$\angle ADB + \angle ADE = \angle ADE + \angle AEC$$

$$\Rightarrow \angle ADB = \angle AEC \quad [\text{समी (i) से}] \dots(iv)$$

अब, $\triangle ADB$ तथा $\triangle AEC$ में,

$$AD = AE \quad [\text{दिया है}]$$

$$BD = EC \quad [\text{दिया है}]$$

$$\angle ADB = \angle AEC \quad [\text{समी (iv) से}]$$

$$\therefore \triangle ADB \cong \triangle AEC \quad [\text{SAS सर्वांगसमता नियम से}]$$

$$\text{तब, } AB = AC \quad [\text{CPCT से}] \quad \text{इति सिद्धम्}$$



प्रश्नावली 8.1

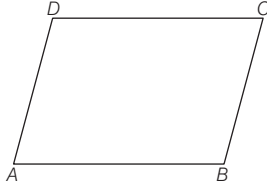
1. किसी समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ में, यदि $\angle D = 105^\circ$ हो, तो $\angle A$ और $\angle B$ की माप अंशों में ज्ञात कीजिए।

हल चतुर्भुज $ABCD$ में, $\angle D = 105^\circ$

\therefore समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

$$\therefore \angle B = \angle D = 105^\circ$$

तथा $\angle A + \angle D = 180^\circ$ [एकान्तर कोण, $AB \parallel DC$]



$$\Rightarrow \angle A + 105^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle A = 75^\circ$$

अतः $\angle A = 75^\circ$, $\angle B = 105^\circ$ हैं।

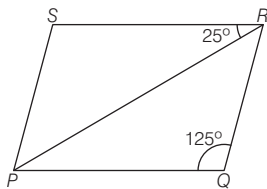
2. समान्तर चतुर्भुज $PQRS$ में, $\angle PQR = 125^\circ$ तथा $\angle PRS = 25^\circ$ हो, तो $\angle SPR$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, समान्तर चतुर्भुज $PQRS$ में,

$$\angle PQR = 125^\circ$$

तथा $\angle PRS = 25^\circ$

\therefore समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।



$$\therefore \angle Q = \angle S = 125^\circ$$

ΔPSR में,

$$\angle PSR + \angle SRP + \angle SPR = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 125^\circ + 25^\circ + \angle SPR = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 150^\circ + \angle SPR = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle SPR = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

अतः $\angle SPR = 30^\circ$ है।

3. एक समान्तर चतुर्भुज $PQRS$ में, विकर्ण PR तथा SQ परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि $PO = 3.4$ सेमी, $OQ = 2.0$ सेमी

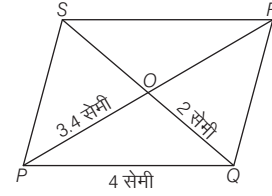
तथा $PQ = 4$ सेमी तथा समान्तर चतुर्भुज $PQRS$ का परिमाण 20 सेमी हो, तो PR , SQ तथा QR के मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, समान्तर चतुर्भुज $PQRS$ में,

$$PO = 3.4 \text{ सेमी}, OQ = 2.0 \text{ सेमी}, PQ = 4 \text{ सेमी}$$

$$\text{तथा } PQ + QR + RS + SP = 20 \text{ सेमी} \quad \dots(i)$$

\therefore समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।



$$\therefore PO = OR$$

$$\text{तथा } OS = OQ$$

$$\text{तब, } PR = PO + OR = 3.4 + 3.4 = 6.8 \text{ सेमी}$$

$$\text{तथा } SQ = OS + OQ = 2 + 2 = 4 \text{ सेमी}$$

\therefore समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।

$$\therefore PQ = SR = 4 \text{ सेमी}$$

$$\text{तथा } PS = QR$$

$$\text{समी (i) से, } PQ + QR + RS + SP = 20$$

$$\Rightarrow 4 + QR + 4 + QR = 20$$

$$\Rightarrow 2QR + 8 = 20$$

$$\Rightarrow 2QR = 20 - 8$$

$$\Rightarrow QR = \frac{12}{2} = 6 \text{ सेमी}$$

अतः $PR = 6.8$ सेमी, $SQ = 4$ सेमी, $QR = 6$ सेमी हैं।

8. यदि समान्तर चतुर्भुज का एक विकर्ण उसके एक कोण को समद्विभाजित करता है, तो वह दूसरे कोण को भी समद्विभाजित करेगा। सिद्ध कीजिए कि दोनों विकर्ण परस्पर लम्बवत् होंगे।

हल दिया है समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ का विकर्ण AC , $\angle A$ को समद्विभाजित करता है।

सिद्ध करना है

(i) विकर्ण AC , $\angle C$ को समद्विभाजित करता है।

(ii) $AC \perp BD$

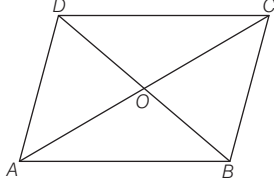
रचना BD को मिलाया।

उपपत्ति

(i) विकर्ण AC , $\angle A$ को समद्विभाजित करता है।

$$\text{अर्थात् } \angle DAC = \angle BAC = \frac{1}{2} \angle BAD \quad \dots(i)$$

यहाँ, $AB \parallel CD$ तथा AC एक तिर्यक रेखा है।



$$\therefore \angle DCA = \angle CAB \quad \dots(ii) \text{ [एकान्तर कोण युग्म]}$$

$$\text{तथा } \angle BCA = \angle DAC \quad \dots(iii) \text{ [एकान्तर कोण युग्म]}$$

समी (i), (ii) तथा (iii) से,

$$\angle DAC = \angle BCA = \angle BAC = \angle DCA$$

$$\text{अब, } \angle BCD = \angle BCA + \angle DCA$$

$$= \angle DAC + \angle CAB = \angle BAD$$

\therefore विकर्ण AC , $\angle C$ को समद्विभाजित करता है।

(ii) चूँकि समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ का विकर्ण AC शीर्ष कोणों को समद्विभाजित करता है।

$\therefore ABCD$ एक समचतुर्भुज होगा।

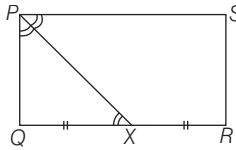
$$\text{अतः } AC \perp BD$$

[\therefore समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समकोण पर प्रतिच्छेद करते हैं।]

इति सिद्धम्

9. एक समान्तर चतुर्भुज $PQRS$ के $\angle P$ का समद्विभाजक QR को बिन्दु X पर समद्विभाजित करता है। सिद्ध कीजिए कि $PS = 2PQ$

हल दिया है $PQRS$ एक समान्तर चतुर्भुज है। $\angle P$ का समद्विभाजित PX है जोकि QR को X पर समद्विभाजित करता है।



$$\text{अर्थात् } QX = XR$$

$$\text{सिद्ध करना है } PS = 2PQ$$

उपपत्ति $\therefore PQRS$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

$$\therefore PS \parallel QR$$

$\therefore PS \parallel QR$ और PX एक तिर्यक रेखा है।

$$\therefore \angle SPX = \angle PXQ \quad \text{[एकान्तर कोण युग्म]} \quad \dots(i)$$

$\therefore PX$, $\angle P$ का समद्विभाजक है।

$$\therefore \angle SPX = \angle QPX \quad \dots(ii)$$

समी (i) तथा (ii) से,

$$\angle PXQ = \angle QPX$$

$$\therefore PQ = QX, \text{ परन्तु } QX = XR$$

$$\therefore PQ = QX \text{ तथा } PQ = XR$$

$$\text{अथवा } 2PQ = (QX + XR)$$

$$\Rightarrow 2PQ = QR$$

परन्तु $PQRS$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

$$\therefore QR = PS$$

$$\text{अतः } PS = 2PQ$$

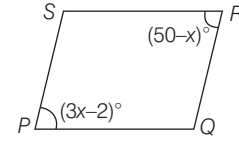
इति सिद्धम्

10. एक समान्तर चतुर्भुज के दो सम्मुख कोण $(3x - 2)^\circ$ तथा $(50 - x)^\circ$ हैं। चतुर्भुज के प्रत्येक कोण की माप ज्ञात कीजिए।

हल माना समान्तर चतुर्भुज $PQRS$ में,

$$\angle P = (3x - 2)^\circ \text{ तथा } \angle R = (50 - x)^\circ$$

हम जानते हैं कि समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।



$$\therefore \angle P = \angle R$$

$$(3x - 2)^\circ = (50 - x)^\circ$$

$$\Rightarrow 3x + x = 50 + 2 \quad \text{[पक्षान्तरण द्वारा]}$$

$$\Rightarrow 4x = 52$$

$$\Rightarrow x = \frac{52}{4} = 13^\circ$$

$$\text{अतः } \angle P = 3 \times 13 - 2 = 39 - 2 = 37^\circ$$

$$\text{तथा } \angle R = 50 - 13 = 37^\circ$$

$$\text{पुनः } \angle P + \angle Q = 180^\circ \quad \text{[एकान्तर अन्तःकोण } PS \parallel QR]$$

$$\Rightarrow 37^\circ + \angle Q = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle Q = 180^\circ - 37^\circ$$

$$\Rightarrow \angle Q = 143^\circ$$

$$\therefore \angle S = \angle Q = 143^\circ$$

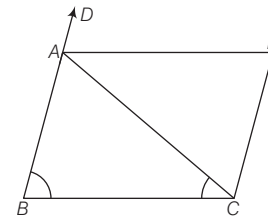
अतः चतुर्भुज के कोणों की माप $37^\circ, 143^\circ, 37^\circ$ तथा 143° है।

12. एक समद्विबाहु $\triangle ABC$ में, $AB = AC$ तथा $CP \parallel AB$, जबकि AP , बहिष्कोण $\angle CAD$ का समद्विभाजक है। सिद्ध कीजिए कि $\angle PAC = \angle BCA$ तथा $ABCP$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

हल दिया है समद्विबाहु $\triangle ABC$ में, $AB = AC$ तथा $CD \parallel AB$

सिद्ध करना है $\angle PAC = \angle BCA$

तथा $ABCP$ समान्तर चतुर्भुज है।



$$\text{उपपत्ति } \therefore \triangle ABC \text{ में, } AB = AC$$

$$\Rightarrow \angle C = \angle B$$

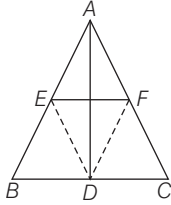
[\therefore सम्मुख भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।]

अब, $\angle CAD = \angle B + \angle C$ [बहिष्कोण प्रमेय से]
 $\Rightarrow 2\angle CAP = 2\angle C$
 $[\because \angle B = \angle C \text{ तथा } AP \angle CAD \text{ का समद्विभाजक है}]$
 $\Rightarrow \angle CAP = \angle C$
 $\Rightarrow AP \parallel BC$ [एकान्तर कोण]
 $\therefore AB \parallel CP$ [दिया है]
 अतः $ABCP$ एक समान्तर चतुर्भुज है। इति सिद्धम्

प्रश्नावली 8.2

1. $\triangle ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें $AB = AC$ बिन्दु D, E तथा F क्रमशः भुजाओं BC, AB तथा AC के मध्य-बिन्दु हैं। सिद्ध कीजिए कि रेखाखण्ड AD , रेखाखण्ड EF पर लम्ब है तथा उसे समद्विभाजित करता है।

हल दिया है $\triangle ABC$ में D, E तथा F क्रमशः भुजाओं BC, AB और CA के मध्य-बिन्दु हैं तथा $AB = AC$
 सिद्ध करना है $AD \perp EF$ एवं AD समद्विभाजक है EF का।



रचना रेखाखण्ड DE और DF को मिलाया।

उपपत्ति $\therefore D$ और E क्रमशः BC और AB के मध्य-बिन्दु हैं।

$\therefore DE = \frac{1}{2} AC$ और $DE \parallel AC$ [मध्य-बिन्दु प्रमेय से]

परन्तु, $AC = 2AF$ [$\because F, AC$ का मध्य-बिन्दु है]

$\therefore DE = AF$ तथा $DE \parallel AF$... (i)

$\therefore DEAF$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\therefore AE = DE$ तथा $AE \parallel DF$... (ii)

[\because समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर एवं समान्तर होती हैं]

परन्तु, $AB = AC$

$\therefore 2AE = 2AF \Rightarrow AE = AF$

अतः E तथा F क्रमशः AB व AC के मध्य-बिन्दु हैं।

$\therefore AE = AF$... (iii)

समी (i), (ii) व (iii) से,

$$DE = AF = AE = DF$$

अथवा $AE = ED = DF = FA$

चतुर्भुज $DEAF$ यहाँ एक वर्ग अथवा समचतुर्भुज है। जिसके विकर्ण AD तथा EF हैं।

\therefore चतुर्भुज के गुणों से स्पष्ट है कि वर्ग या समचतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

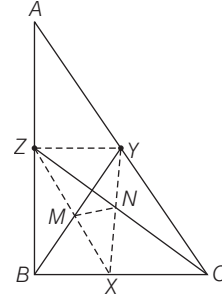
अतः $AD \perp EF$ और AD, EF का समद्विभाजक भी है।

इति सिद्धम्

2. $\triangle ABC$ की भुजाओं BC, CA और AB के मध्य-बिन्दु क्रमशः X, Y तथा Z हैं। XZ और BY परस्पर बिन्दु M पर मिलते हैं तथा CZ और XY परस्पर N पर मिलते हैं। सिद्ध कीजिए कि $MN = \frac{1}{4} BC$

हल दिया है $\triangle ABC$ में भुजाओं BC, CA व AB के मध्य-बिन्दु क्रमशः X, Y तथा Z हैं। जिनको सरल रेखाओं द्वारा मिलाकर $\triangle XYZ$ बनाया गया है।

रेखा XZ और BY का प्रतिच्छेदन बिन्दु M तथा रेखा XY और CZ का प्रतिच्छेदन बिन्दु N है।



सिद्ध करना है $MN = \frac{1}{4} BC$

उपपत्ति $\triangle ABC$ में, AB का मध्य-बिन्दु Z तथा AC का मध्य-बिन्दु Y है।

$\therefore YZ = \frac{1}{2} BC$ [मध्य-बिन्दु प्रमेय से] ... (i)

तथा $YZ \parallel BC$ अथवा $YZ \parallel BX$

$\therefore X, BC$ का मध्य-बिन्दु है।

$\therefore BX = \frac{1}{2} BC$... (ii)

\therefore समी (i) व (ii) से, $YZ = BX$ व पूर्व में सिद्ध किया है कि

$$YZ \parallel BX$$

अतः चतुर्भुज $BXYZ$ एक समान्तर चतुर्भुज है जिसके विकर्ण BY व XZ एक-दूसरे को बिन्दु M पर समद्विभाजित करेंगे।

\therefore बिन्दु M, BY का मध्य-बिन्दु है।

इसी प्रकार, $YZ = \frac{1}{2} BC = XC$

अथवा $YZ = XC$ और $YZ \parallel XC$ है।

$\therefore XCYZ$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

\therefore समान्तर चतुर्भुज $XCYZ$ के विकर्ण CZ व XY एक-दूसरे को बिन्दु N पर समद्विभाजित करेंगे।

\therefore बिन्दु N, XY के मध्य-बिन्दु हैं।

अब, $\triangle XYZ$ में,

बिन्दु M, YZ का तथा N भुजा XY का मध्य-बिन्दु है।

$\therefore MN = \frac{1}{2} YZ$... (iii)

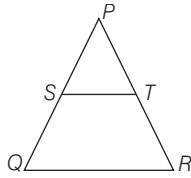
समी (i) से YZ का मान समी (iii) में रखने पर,

$$MN = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} BC \right) = \frac{1}{4} BC$$

अतः $MN = \frac{1}{4} BC$ इति सिद्धम्

3. ΔPQR में, $PQ = PR$ तथा S, PQ का मध्य-बिन्दु है। S से QR के समान्तर एक रेखा खींची गई है, जो PR को बिन्दु T पर काटती है। सिद्ध कीजिए कि $PS = PT$

हल दिया है ΔPQR जिसमें $PQ = PR$ तथा S, PQ का मध्य-बिन्दु है।
रचना ST को मिलाया, जोकि QR के समान्तर है।
सिद्ध करना है $PS = PT$



उपपत्ति चूँकि S, PQ का मध्य-बिन्दु है तथा $ST \parallel QR$ है। अतः
मध्य-बिन्दु प्रमेय के विलोम से, T भी PR का मध्य-बिन्दु होगा
अर्थात् $PT = TR$

$$\therefore \angle PTS = \angle PRQ \quad \dots(i)$$

$$\text{तथा} \quad \angle PST = \angle PQR \quad \dots(ii)$$

[$\because S$ तथा T क्रमशः PQ व PR के मध्य-बिन्दु हैं]

$$\text{चूँकि} \quad PQ = PR \quad [\text{दिया है}]$$

$$\therefore \angle PQR = \angle PRQ \quad \dots(iii)$$

समी (i), (ii) व (iii) से,

$$\angle PST = \angle PTS \quad \dots(iv)$$

$$\Delta PST \text{ में,} \quad \angle PST = \angle PTS \quad [\text{समी (iv) से}]$$

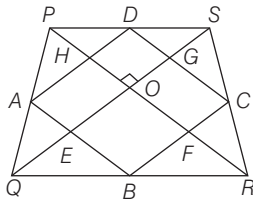
$$\therefore PS = PT$$

[\because समान कोणों की सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं]

इति सिद्धम्

4. यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्ब हैं, तो सिद्ध कीजिए कि इसकी भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड एक आयत बनाते हैं।

हल दिया है $PQRS$ एक चतुर्भुज है जिसमें विकर्ण PR और QS इस प्रकार हैं कि $PR \perp QS$ ।



चतुर्भुज की भुजाओं PQ, QR, RS और SP के मध्य-बिन्दु क्रमशः A, B, C, D हैं। E, F, G, H क्रमशः चतुर्भुज $ABCD$ की भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिन्दु हैं।

□□□

सिद्ध करना है $ABCD$ एक आयत है।

उपपत्ति $\therefore \Delta PQR$ में, A, PQ का तथा B, QR का मध्य-बिन्दु है।

$$\therefore AB = \frac{1}{2} PR \text{ तथा } AB \parallel PR \quad \dots(i)$$

तथा ΔPSR में C, SR का तथा D, PS का मध्य-बिन्दु है।

$$\therefore CD = \frac{1}{2} PR \text{ तथा } CD \parallel PR \quad \dots(ii)$$

समी (i) व (ii) से,

$$AB = CD \text{ तथा } AB \parallel CD$$

$\therefore ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

$$\therefore CD \parallel PR, \text{ अतः } DG \parallel HO \quad \dots(iii)$$

$\therefore ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

$$\therefore AD \parallel BC \text{ अथवा } AD \parallel QS$$

[$\because A$ और D क्रमशः PQ तथा PS के मध्य-बिन्दु हैं]

$$\therefore HD \parallel OS \quad \dots(iv)$$

समी (iii) और (iv) से, $OGDH$ भी एक समान्तर चतुर्भुज होगा।

$$\angle HOG = 90^\circ \quad [\text{दिया है}]$$

$$\therefore \angle D = 90^\circ$$

[\because समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं]

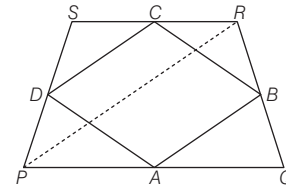
\therefore समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ का $\angle D$ समकोण है।

अतः $ABCD$ एक आयत है।

इति सिद्धम्

5. सिद्ध कीजिए कि किसी चतुर्भुज की क्रमागत भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड से बना चतुर्भुज एक समान्तर चतुर्भुज होता है।

हल दिया है चतुर्भुज $PQRS$ की क्रमागत भुजाओं PQ, QR, RS और SP के मध्य-बिन्दु क्रमशः A, B, C और D हैं। इन बिन्दुओं को मिलाकर चतुर्भुज $ABCD$ बनता है।



सिद्ध करना है चतुर्भुज $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

रचना विकर्ण PR को मिलाया।

उपपत्ति ΔPQR में, A तथा B क्रमशः PQ और QR के मध्य-बिन्दु हैं।

$$\therefore AB \parallel PR \text{ और } AB = \frac{1}{2} PR \quad \dots(i)$$

इसी प्रकार, ΔPRS में, D तथा C क्रमशः PS और SR के मध्य-बिन्दु हैं।

$$\therefore DC \parallel PR \text{ और } DC = \frac{1}{2} PR \quad \dots(ii)$$

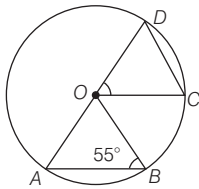
समी (i) तथा (ii) से, $AB = CD$ और $AB \parallel CD$

अतः $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

इति सिद्धम्

प्रश्नावली 9.1

1. दी गई आकृति में, जीवाएँ AB तथा CD बराबर हैं यदि $\angle OBA = 55^\circ$ है, तब $\angle COD$ की माप ज्ञात कीजिए।



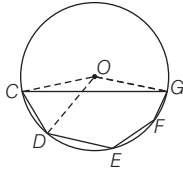
हल $\triangle OAB$ में, $OA = OB$
 $\therefore \angle OAB = \angle OBA = 55^\circ$
 $\therefore \angle AOB = 180^\circ - (\angle OAB + \angle OBA)$
 $= 180^\circ - (55^\circ + 55^\circ)$
 $= 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$

\therefore जीवाएँ AB तथा CD बराबर हैं।

\therefore ये दोनों केन्द्र पर समान कोण अन्तरित करेंगे।

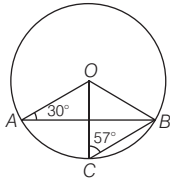
$\therefore \angle COD = \angle AOB = 70^\circ$

2. नीचे दी गई आकृति में, वृत्त का केन्द्र 'O' तथा $CD = DE = EF = GF$ है यदि $\angle COD = 40^\circ$ है, तब प्रतिवर्ती $\angle COG$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल दी गई आकृति में, $CD = DE = EF = GF$
 \therefore ये वृत्त के केन्द्र पर समान कोण अन्तरित करेंगे।
 $\therefore \angle COD = \angle DOE = \angle EOF = \angle FOG = 40^\circ$
 $\therefore \angle COG = 4 \times 40^\circ = 160^\circ$
 अब, प्रतिवर्ती $\angle COG = 360^\circ - \angle COG = 360^\circ - 160^\circ = 200^\circ$

3. दी गई आकृति में, $\angle OAB = 30^\circ$ तथा $\angle OCB = 57^\circ$ हैं, तब $\angle BOC$ तथा $\angle AOC$ की माप ज्ञात कीजिए।



हल दी गई आकृति में, $\angle OCB = 57^\circ$
 तथा $\angle OAB = 30^\circ$
 $\triangle OCB$ में, $OC = OB$
 $\therefore \angle OBC = \angle OCB = 57^\circ$
 तब, $\angle BOC = 180^\circ - (\angle OBC + \angle OCB)$
 $= 180^\circ - (57^\circ + 57^\circ)$
 $= 180^\circ - 114^\circ = 66^\circ$

अब, $\triangle OAB$ में, $OA = OB$

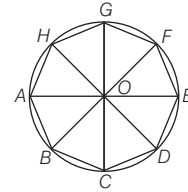
$\therefore \angle OBA = \angle OAB = 30^\circ$

तब, $\angle AOB = 180^\circ - (\angle OBA + \angle OAB)$
 $= 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$\therefore \angle AOC = \angle AOB - \angle BOC = 120^\circ - 66^\circ = 54^\circ$

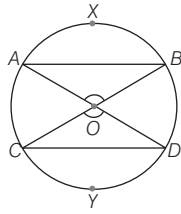
4. यदि वृत्त का केन्द्र 'O' तथा बिन्दु A, B, C, D, E, F, G और H वृत्त पर इस प्रकार स्थित हैं कि $AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = HA$ तब, $\angle AOB, \angle AOC, \angle DOF$ तथा $\angle EOH$ के मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = HA$
 $\therefore \angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \dots$



$\therefore \angle AOB = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$
 $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$
 $= 45^\circ + 45^\circ \quad [\because \angle BOC = \angle AOB]$
 $= 90^\circ$
 $\angle DOF = \angle DOE + \angle EOF$
 $= 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$
 $\angle EOH = \angle EOF + \angle FOG + \angle GOH$
 $= 45^\circ + 45^\circ + 45^\circ$
 $= 135^\circ$

5. यदि वृत्त के चाप AXB तथा CYD सर्वांगसम हैं, तब AB तथा CD का अनुपात ज्ञात कीजिए।



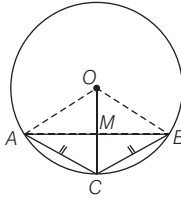
हल दी गई आकृति में, वृत्त के चाप AXB तथा CYD सर्वांगसम हैं।

$\therefore \angle AOB = \angle COD$, तब जीवा $AB =$ जीवा CD

[\because बराबर जीवाएँ केन्द्र पर बराबर कोण अन्तरित करती हैं]

$$\Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{1}{1} \Rightarrow AB : CD = 1 : 1$$

6. दी गई आकृति में, दो जीवाएँ AC और BC बराबर हैं तथा त्रिज्या OC , AB को बिन्दु M पर प्रतिच्छेद करती है, तब $AM : BM$ का अनुपात ज्ञात कीजिए।



हल दी गई आकृति में, जीवा $AC =$ जीवा BC

$$\therefore \angle AOC = \angle BOC$$

$$\text{या } \angle AOM = \angle BOM \quad \dots(i)$$

अब, $\triangle AOM$ और $\triangle BOM$ में,

$$OA = OB \quad [\text{एक वृत्त की त्रिज्याएँ}]$$

$$\angle AOM = \angle BOM \quad [\text{समी (i) से}]$$

$$OM = OM \quad [\text{उभयनिष्ठ}]$$

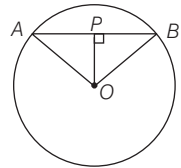
$$\therefore \triangle AOM \cong \triangle BOM \quad [\text{SAS सर्वांगसमता नियम से}]$$

$$\text{तब, } AM = BM$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{BM} = \frac{1}{1} \Rightarrow AM : BM = 1 : 1$$

प्रश्नावली 9.2

1. दी गई आकृति में, केन्द्र O से जीवा AB पर लम्ब खींचा गया है। यदि $AB = 8$ सेमी है, तब AP तथा PB ज्ञात कीजिए।

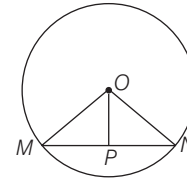


हल \because वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है।

$$\therefore AP = PB = \frac{AB}{2} = \frac{8}{2} \quad [\because AB = 8 \text{ सेमी, दिया है}]$$

$$= 4 \text{ सेमी}$$

2. निम्न आकृति में, यदि $MP = PN$ है, तब $\angle OPN$ तथा $\angle OPM$ के मान ज्ञात कीजिए।



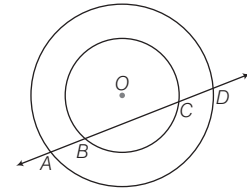
हल दी गई आकृति में, $MP = PN$

$\therefore MN$ वृत्त की जीवा है तथा OP इसे दो बराबर भागों में विभाजित करता है।

$$\therefore OP \perp MN$$

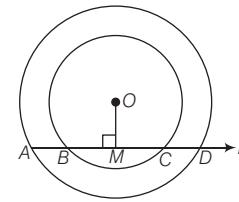
$$\text{अर्थात् } \angle OPN = \angle OPM = 90^\circ$$

3. दी गई आकृति में, दो संकेन्द्रीय वृत्त जिनका केन्द्र O है तथा A, B, C और D चार प्रतिच्छेदन बिन्दु रेखा l पर स्थित हैं। यदि $AD = 12$ सेमी तथा $BC = 8$ सेमी है, तब AB और CD की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



हल दी गई आकृति में,

$$AD = 12 \text{ सेमी, } BC = 8 \text{ सेमी}$$



अब, वृत्त के केन्द्र O से रेखा l या BC पर लम्ब OM खींचा।

$$\therefore CM = BM = \frac{BC}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ सेमी}$$

$$\text{तथा } DM = AM = \frac{AD}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ सेमी}$$

$$\therefore AB = AM - BM = 6 - 4 = 2 \text{ सेमी}$$

$$\text{तथा } CD = DM - CM = 6 - 4 = 2 \text{ सेमी}$$

4. 10 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त के केन्द्र से 5 सेमी की दूरी पर स्थित जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

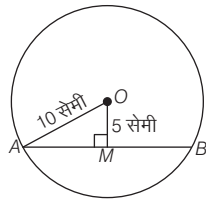
हल माना AB , केन्द्र O वाले वृत्त की जीवा है।

तब, $OA = 10$ सेमी तथा $OM = 5$ सेमी

$$\triangle OAM \text{ में, } OA^2 = OM^2 + AM^2$$

$$\Rightarrow 100 = 25 + AM^2$$

$$\Rightarrow AM^2 = 100 - 25$$

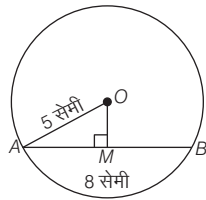


$$\begin{aligned} \Rightarrow AM^2 &= 75 \\ \Rightarrow AM &= 5\sqrt{3} \\ \therefore AB &= 2AM = 2 \times 5\sqrt{3} = 10\sqrt{3} \\ &= 10 \times 1.732 = 17.32 \text{ सेमी} \end{aligned}$$

5. एक वृत्त की त्रिज्या 5 सेमी तथा वृत्त की जीवा की लम्बाई 8 सेमी है। तब, वृत्त के केन्द्र से जीवा की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल O वृत्त का केन्द्र है तथा AB एक जीवा है।

$$\therefore OA = 5 \text{ सेमी तथा } AB = 8 \text{ सेमी}$$



$$\therefore AM = \frac{AB}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ सेमी}$$

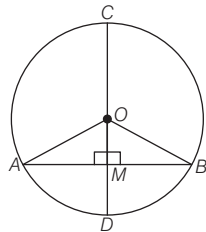
अब $\triangle OAM$ में,

$$\begin{aligned} OA^2 &= OM^2 + AM^2 \\ \Rightarrow 25 &= OM^2 + 16 \\ \Rightarrow OM^2 &= 25 - 16 \\ \Rightarrow OM^2 &= 9 \\ \Rightarrow OM &= 3 \text{ सेमी} \end{aligned}$$

अतः वृत्त के केन्द्र से जीवा की दूरी = 3 सेमी

6. सिद्ध कीजिए कि वृत्त का वह व्यास जोकि वृत्त की जीवा को समद्विभाजित करता है साथ ही, वह वृत्त के केन्द्र पर जीवा द्वारा अन्तरित कोण को भी समद्विभाजित करेगा।

हल दिया है एक O केन्द्र वाला वृत्त जिसकी जीवा AB को व्यास CD बिन्दु M पर प्रतिच्छेद करता है।



सिद्ध करना है $\angle AOM = \angle BOM$

तथा $AM = BM$

रचना OA, OB को मिलाया।

उपपत्ति $\triangle AOM$ तथा $\triangle BOM$ में,

$$OA = OB \quad [\text{एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ}]$$

$$OM = OM \quad [\text{उभयनिष्ठ}]$$

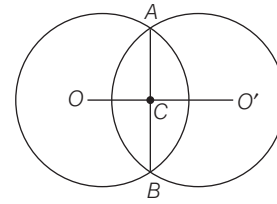
$$\angle OMA = \angle OMB \quad [\text{प्रत्येक } 90^\circ]$$

$$\therefore \triangle AOM \cong \triangle BOM \quad [\text{RHS सर्वांगसमता नियम से}]$$

$$\text{तब, } AM = BM$$

$$\text{तथा } \angle AOM = \angle BOM \quad \text{इति सिद्धम्}$$

7. निम्न आकृति में, O तथा O' क्रमशः 20 सेमी और 37 सेमी त्रिज्याओं वाले वृत्तों के केन्द्र हैं। यदि AB = 24 सेमी है, तब OO' की दूरी ज्ञात कीजिए।

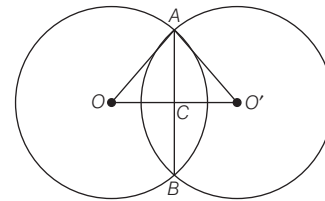


हल दी गई आकृति में O, O' केन्द्र वाले वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 20 और 37 सेमी हैं।

$$\therefore OA = 20 \text{ सेमी, } O'A = 37 \text{ सेमी}$$

$$\text{तथा } AB = 24 \text{ सेमी}$$

$$\therefore AC = \frac{AB}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ सेमी}$$



$$\triangle OCA \text{ में, } OA^2 = (OC)^2 + (CA)^2$$

$$\Rightarrow (20)^2 = (OC)^2 + (12)^2$$

$$\Rightarrow 400 = (OC)^2 + 144$$

$$\Rightarrow (OC)^2 = 400 - 144$$

$$\Rightarrow (OC)^2 = 256$$

$$\Rightarrow OC = 16$$

अब $\triangle O'CA$ में,

$$(O'A)^2 = (O'C)^2 + AC^2$$

$$\Rightarrow (37)^2 = (O'C)^2 + (12)^2$$

$$\Rightarrow 1369 = (O'C)^2 + 144$$

$$\Rightarrow (O'C)^2 = 1369 - 144$$

$$\Rightarrow (O'C)^2 = 1225$$

$$\Rightarrow O'C = 35$$

$$\begin{aligned} \text{अब, } OO' &= OC + O'C \\ &= 16 + 35 = 51 \text{ सेमी} \end{aligned}$$

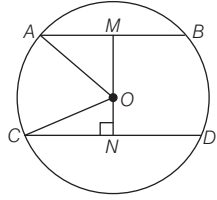
8. वृत्त की दो समान्तर जीवाएँ जोकि 5 सेमी और 12 सेमी लम्बाई की हैं तथा जिसका व्यास 13 सेमी है। तब जीवाओं के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए, यदि वे केन्द्र की विपरीत भुजाओं की तरफ स्थित हो।

हल माना वृत्त का केन्द्र O है तथा त्रिज्या $= \frac{13}{2}$ सेमी

$$\therefore OA = OC = \frac{13}{2}$$

तथा AB, CD दो समान्तर जीवाएँ हैं।

यहाँ, $AB = 5$ सेमी, $CD = 12$ सेमी



केन्द्र O से जीवाओं पर लम्ब OM, ON हैं

$$\therefore AM = \frac{AB}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\text{तथा } CN = \frac{CD}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$\Delta OMA \text{ में, } OA^2 = OM^2 + AM^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{13}{2}\right)^2 = OM^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow OM^2 = \frac{169}{4} - \frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow OM^2 = \frac{144}{4}$$

$$\Rightarrow OM^2 = 36$$

$$\Rightarrow OM = 6 \text{ सेमी}$$

ΔCON में,

$$OC^2 = ON^2 + CN^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{13}{2}\right)^2 = ON^2 + (6)^2$$

$$\Rightarrow ON^2 = \frac{169}{4} - 36 \Rightarrow ON^2 = \frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow ON = \frac{5}{2} = 2.5 \text{ सेमी}$$

अब, जीवाओं के बीच की दूरी,

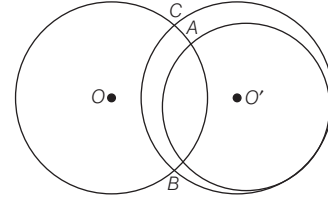
$$MN = OM + ON = 6 + 2.5 = 8.5 \text{ सेमी}$$

9. सिद्ध कीजिए कि दो अलग-अलग वृत्त एक-दूसरे को केवल दो बिन्दुओं पर काटते हैं।

हल दिया है दो वृत्त जिनके केन्द्र O तथा O' हैं, जो एक-दूसरे को प्रतिच्छेद करते हैं।

सिद्ध करना है वृत्त दो बिन्दुओं A तथा B पर काटते हैं।

रचना एक तीसरा बिन्दु C लिया।



उपपत्ति माना वृत्तों पर तीन बिन्दु हैं [रचना से]

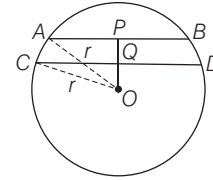
\therefore प्रत्येक वृत्त पर तीन बिन्दु होंगे।

\therefore तीन बिन्दुओं से केवल एक वृत्त खींचा जा सकता है, जबकि यहाँ दो वृत्त हैं।

अतः वृत्तों पर केवल दो बिन्दु होंगे।

इति सिद्धम्

11. दी गई आकृति में, O एक वृत्त का केन्द्र है जिसकी त्रिज्या r है। OP तथा OQ क्रमशः AB तथा CD पर लम्ब हैं, तथा $PQ = 1$ सेमी, यदि $AB \parallel CD$, $AB = 6$ सेमी तथा $CD = 8$ सेमी, तो r का मान ज्ञात करो।



हल दी गई आकृति में, $OP \perp AB$ तथा $OQ \perp CD$

और $PQ = 1$ सेमी, $AB \parallel CD$, $AB = 6$ सेमी, $CD = 8$ सेमी

$$\therefore AP = \frac{AB}{2} = 3 \text{ सेमी}$$

$$\text{तथा } CQ = \frac{CD}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ सेमी}$$

$$\Delta OCQ \text{ में, } OC^2 = OQ^2 + CQ^2$$

$$\Rightarrow r^2 = OQ^2 + 16 \quad \dots(i)$$

ΔOAP में,

$$OA^2 = AP^2 + OP^2$$

$$\Rightarrow r^2 = (3)^2 + (OQ + PQ)^2$$

$$\Rightarrow r^2 = 9 + OQ^2 + PQ^2 + 2 \cdot OQ \cdot PQ$$

$$\Rightarrow r^2 = 9 + OQ^2 + 1 + 2OQ \quad [\because PQ = 1]$$

$$\Rightarrow r^2 = 10 + OQ^2 + 2(OQ) \quad \dots(ii)$$

समी (i) तथा (ii) से,

$$OQ^2 + 16 = 10 + OQ^2 + 2(OQ)$$

$$\Rightarrow 16 - 10 = 2(OQ) \Rightarrow 2(OQ) = 6$$

$$\Rightarrow OQ = \frac{6}{2} = 3 \text{ सेमी}$$

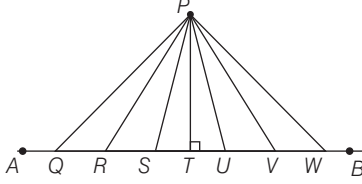
अब, OQ का मान समी (i) में रखने पर,

$$r^2 = 9 + 16$$

$$\Rightarrow r^2 = 25 \Rightarrow r = 5 \text{ सेमी}$$

प्रश्नावली 9.3

1. निम्न आकृति में, बिन्दु P से रेखा AB के बीच की सबसे न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।



हल दो बिन्दुओं के बीच लम्बवत् दूरी इन बिन्दुओं के बीच सबसे न्यूनतम दूरी होती है।

\therefore न्यूनतम दूरी = PT

2. समान वृत्त के केन्द्र पर बराबर जीवाओं द्वारा अन्तरित कोण क्या होगा?

हल एक ही वृत्त पर समान जीवाओं द्वारा केन्द्र पर बना कोण समान होता है।

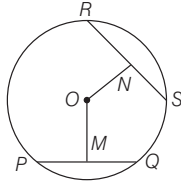
3. एक वृत्त के चाप AB और CD इस प्रकार हैं कि $\overline{AB} = \overline{CD}$, तब AB और CD की लम्बाइयों का अनुपात क्या होगा?

हल किसी वृत्त के समान चाप केन्द्र पर समान कोण अन्तरित करते हैं और वृत्त की समान जीवाएँ भी केन्द्र पर समान कोण अन्तरित करती हैं

यदि $\overline{AB} = \overline{CD}$, तब जीवा $AB =$ जीवा CD

$\Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{1}{1} \Rightarrow AB:CD = 1:1$

4. निम्न आकृति में, PQ तथा RS वृत्त की दो जीवाएँ हैं जिसका केन्द्र O है यदि $PQ = RS$ तथा $ON = 3$ सेमी है, तब OM ज्ञात कीजिए।



हल दी गई आकृति में PQ, RS वृत्त की दो जीवाएँ हैं

तथा $PQ = RS, ON = 3$ सेमी

\therefore वृत्त की बराबर जीवाएँ वृत्त के केन्द्र से समान दूरी पर होती हैं।

$\therefore OM = ON = 3$ सेमी

5. वृत्त की दो बराबर जीवाएँ क्रमशः AB और CD हैं जिसका केन्द्र O है। यदि $OM \perp AB$ तथा $ON \perp CD$ है, तब सिद्ध कीजिए कि $\angle OMN = \angle ONM$

हल दिया है वृत्त की दो बराबर जीवाएँ AB और CD हैं। साथ ही $OM \perp AB$ और $ON \perp CD$

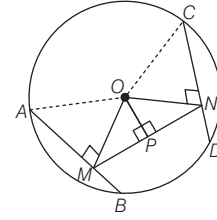
$\therefore \frac{AB}{2} = \frac{CD}{2}$

$\Rightarrow AM = CN \dots(i)$

तथा $OM = ON \dots(ii)$

सिद्ध करना है $\angle OMN = \angle ONM$

रचना MN को मिलाया, और $OP \perp MN$ खींचा।



उपपत्ति $\triangle OMP$ तथा $\triangle ONP$ में,

$OM = ON$ [समी (ii) से]

$OP = OP$ [उभयनिष्ठ]

$\angle OPM = \angle OPN$ [प्रत्येक 90°]

$\therefore \triangle OMP \cong \triangle ONP$ [RHS सर्वांगसमता नियम से]

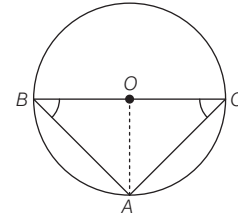
तब, $\angle OMP = \angle ONP$

या $\angle OMN = \angle ONM$ इति सिद्धम्

6. यदि वृत्त की दो जीवाएँ जिनका एक उभयनिष्ठ अन्तःबिन्दु हैं वे उभयनिष्ठ अन्तःबिन्दु से व्यास से समान कोण पर झुकी हुई हों, तब सिद्ध कीजिए कि जीवाएँ बराबर होंगी।

हल दिया है एक वृत्त जिसका केन्द्र O है, तथा जीवा AB, AC है और BC व्यास है तब,

$\angle ABO = \angle ACO$



सिद्ध करना है $AB = AC$

रचना OA को मिलाया।

उपपत्ति $\triangle OBA$ तथा $\triangle OCA$ में,

$OB = OC$ [एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ]

$\angle ABO = \angle ACO$ [दिया है]

$OA = OA$ [उभयनिष्ठ]

$\therefore \triangle OBA \cong \triangle OCA$ [SSA सर्वांगसमता नियम से]

तब, $AB = AC$ [CPCT से] इति सिद्धम्

7. भुजा OD , वृत्त की जीवा AB पर लम्ब है जिसका केन्द्र O है। यदि BC व्यास है, तब सिद्ध कीजिए कि $CA = 2OD$ है।

हल दिया है एक वृत्त, जिसका केन्द्र O है तथा AB एक जीवा है और $OD \perp AB$ है, BC वृत्त का व्यास है।

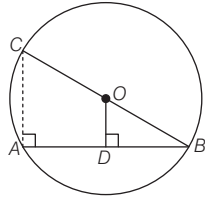
सिद्ध करना है $CA = 2OD$

रचना CA को मिलाया।

उपपत्ति $\triangle ODB$ तथा $\triangle CAB$ में,

$\angle ODB = \angle CAB$ [प्रत्येक 90°]

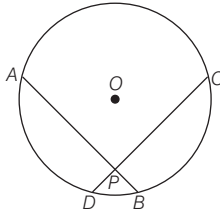
[\therefore अर्द्धवृत्त में बना कोण 90° होता है]



तथा $\angle B = \angle B$ [उभयनिष्ठ]
 $\therefore \triangle ODB \sim \triangle CAB$ [AA समरूपता नियम से]
 अब,
 $\frac{CA}{OD} = \frac{BC}{OB}$
 [∵ समरूप त्रिभुज की संगत भुजाओं के अनुपात समान होते हैं]
 $\Rightarrow \frac{CA}{OD} = \frac{2(OB)}{OB}$ [∵ व्यास $BC = 2OB$]
 $\Rightarrow CA = 2OD$ इति सिद्धम्

8. यदि वृत्त की दो बराबर जीवाएँ वृत्त में परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं, तब सिद्ध कीजिए एक जीवा का वृत्तखण्ड, अन्य जीवा के संगत वृत्तखण्ड के बराबर होगा।

हल दिया है वृत्त की दो बराबर जीवाएँ AB तथा CD है, जो वृत्त के अन्दर बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करती हैं।



सिद्ध करना है

वृत्तखण्ड $ADBA =$ वृत्तखण्ड $CBDC$

उपपत्ति जीवा $AB =$ जीवा CD

\therefore चाप $ADB =$ चाप CBD

समान चाप वृत्त के केन्द्र पर समान कोण अन्तरित करते हैं।

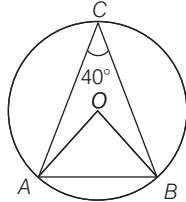
\therefore वृत्तखण्डों के क्षेत्रफल बराबर होंगे

[∵ वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल = त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल - जीवा से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल]

अतः वृत्तखण्ड $ADBA =$ वृत्तखण्ड $CBDC$ इति सिद्धम्

प्रश्नावली 9.4

1. दी गई आकृति में, $\angle ACB = 40^\circ$ है, तब $\angle OAB$ ज्ञात कीजिए।

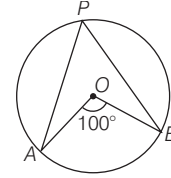


हल दी गई आकृति में, $\angle OAB = 2 \times \angle ACB$

[∵ केन्द्र पर बना कोण, परिधि पर बने कोण का दोगुना होता है]

$\Rightarrow \angle OAB = 2 \times 40^\circ = 80^\circ$

2. दी गई आकृति में, यदि $\angle AOB = 100^\circ$ है, तब $\angle APB$ का मान ज्ञात कीजिए।



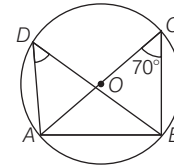
हल दी गई आकृति में, $\angle APB = \frac{1}{2} \angle AOB$

[∵ परिधि का कोण, केन्द्र के कोण का आधा होता है]

$\Rightarrow \angle APB = \frac{1}{2} \times 100^\circ$ [∵ $\angle AOB = 100^\circ$]

$\Rightarrow \angle APB = 50^\circ$

3. दी गई आकृति में, $\angle ACB = 70^\circ$ है, तब $\angle ADB$ ज्ञात कीजिए।

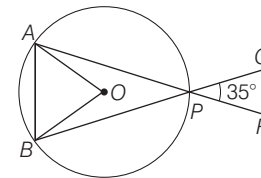


हल दी गई आकृति में, $\angle ADB = \angle ACB$

[∵ एक ही वृत्तखण्ड के कोण बराबर होते हैं]

$\Rightarrow \angle ADB = 70^\circ$ [∵ $\angle ACB = 70^\circ$]

4. दी गई आकृति में, O वृत्त का केन्द्र है तथा जीवाओं AP और BP को क्रमशः R तथा Q तक बढ़ाया गया है। यदि $\angle QPR = 35^\circ$ है, तब $\angle AOB$ की माप ज्ञात कीजिए।



हल दी गई आकृति में,

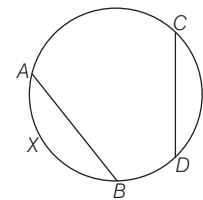
$\angle APB = \angle QPR$ [शीर्षाभिमुख कोण है]

$\Rightarrow \angle APB = 35^\circ$ [∵ $\angle QPR = 35^\circ$]

अब, $\angle AOB = 2 \times \angle APB = 2 \times 35^\circ = 70^\circ$

5. यदि एक वृत्त के चाप AXB तथा CYD सर्वांगसम हों, तब AB तथा CD का अनुपात ज्ञात कीजिए।

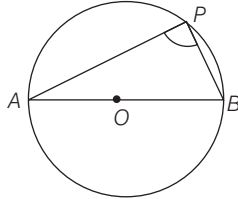
हल एक वृत्त के चाप AXB तथा CYD सर्वांगसम हैं, जो केन्द्र पर समान कोण अन्तरित करेंगे।



∴ वृत्त की समान जीवाएँ भी वृत्त के केन्द्र पर समान कोण अन्तरित करती हैं।

$$\begin{aligned} \therefore \quad & \text{जीवा } AB = \text{जीवा } CD \\ \Rightarrow \quad & \frac{AB}{CD} = \frac{1}{1} \\ \Rightarrow \quad & AB : CD = 1 : 1 \end{aligned}$$

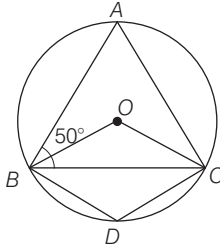
6. दी गई आकृति में, $\angle APB$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल दी गई आकृति में, $\angle APB = 90^\circ$

[∵ अर्द्धवृत्त में बना कोण समकोण होता है।]

7. दी गई आकृति में, O वृत्त का केन्द्र तथा $BA = AC$ है। यदि $\angle ABC = 50^\circ$ है, तब $\angle BOC$ तथा $\angle BDC$ के मान ज्ञात कीजिए।



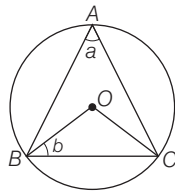
हल दी गई आकृति में, $BA = AC$

$$\begin{aligned} \therefore \quad & \angle ACB = \angle ABC = 50^\circ \\ \text{तथा} \quad & \angle BAC = 180^\circ - (\angle ACB + \angle ABC) \\ & = 180^\circ - (50^\circ + 50^\circ) \\ & = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{अब,} \quad & \angle BOC = 2 \times \angle BAC \\ & = 2 \times 80^\circ = 160^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad & \angle BDC = \frac{1}{2} \text{ प्रतिवर्ती कोण (BOC)} \\ & = \frac{1}{2} (360^\circ - 160^\circ) = 100^\circ \end{aligned}$$

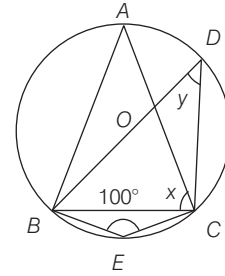
8. दी गई आकृति में, O वृत्त का केन्द्र, BC इसकी जीवा तथा A वृत्त पर स्थित कोई बिन्दु है। यदि $\angle BAC = a$ तथा $\angle OBC = b$ है, तब $a + b$ ज्ञात कीजिए।



हल दी गई आकृति में, $\angle BAC = a$, $\angle OBC = b$

$$\begin{aligned} \Delta OBC \text{ में,} \quad & OB = OC \\ \therefore \quad & \angle OCB = \angle OBC = b \\ \text{तथा} \quad & \angle BOC = 180^\circ - (\angle OCB + \angle OBC) \\ & = 180^\circ - (b + b) = 180^\circ - 2b \\ \therefore \quad & \angle BOC = 2 \times \angle BAC \\ \Rightarrow \quad & 180^\circ - 2b = 2a \\ \Rightarrow \quad & 2a + 2b = 180^\circ \\ \Rightarrow \quad & a + b = 90^\circ \end{aligned}$$

9. दी गई आकृति में, ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जोकि O केन्द्र वाले वृत्त में इस प्रकार अन्तर्निहित है कि $AB = AC$ तथा $\angle BEC = 100^\circ$ है, तब x और y के मान ज्ञात कीजिए।



हल दी गई आकृति में, $\angle BEC = 100^\circ$

$$\therefore \angle BAC = 180^\circ - \angle BEC = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

$$\Delta BAC \text{ में,} \quad AB = AC$$

$$\therefore \angle ACB = \angle ABC = x \quad [\text{दिया है}]$$

$$\text{अब, } \angle ACB + \angle ABC + \angle BAC = 180^\circ$$

$$\Rightarrow x + x + 80 = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2x = 180^\circ - 80^\circ$$

$$\Rightarrow x = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$$

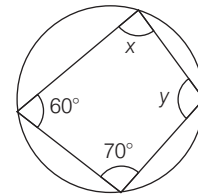
$$\text{तथा} \quad y = \angle BAC$$

[∵ एक ही वृत्तखण्ड के कोण बराबर होते हैं।]

$$\Rightarrow y = 80^\circ$$

$$\text{अतः} \quad x = 50^\circ, y = 80^\circ$$

10. दी गई आकृति में, $x + y$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल दी गई आकृति में बने चतुर्भुज के सभी कोणों का योगफल = 360°

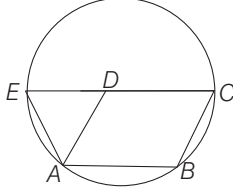
$$\Rightarrow 60^\circ + 70^\circ + x + y = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 130^\circ + x + y = 360^\circ$$

$$\Rightarrow x + y = 360^\circ - 130^\circ$$

$$\Rightarrow x + y = 230^\circ$$

11. दी गई आकृति में, $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है। A, B और C से जाने वाला वृत्त CD को बढ़ाने पर E पर मिलता है। तब सिद्ध कीजिए कि $AD = AE$



हल दी गई आकृति में, $ABCD$ समान्तर चतुर्भुज है,
 $AB \parallel DC$ तथा $BC \parallel AD$

$$\therefore \angle A = \angle C, \angle B = \angle D$$

तथा $ABCE$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।

$$\therefore \angle A + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle B + \angle E = 180^\circ$$

$$\text{या } \angle E = 180^\circ - \angle B$$

$$\text{अब, } \angle EDB = 180^\circ - \angle B \quad [\because \angle B = \angle D]$$

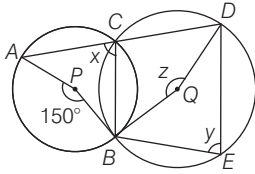
$$\Delta ADE \text{ में, } \angle E = 180^\circ - \angle B$$

$$\angle D = 180^\circ - \angle B$$

$$\therefore AD = AE$$

[\because समान कोणों की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं]

12. दी गई आकृति में, P तथा Q दो वृत्तों के केन्द्र हैं जोकि परस्पर B तथा C पर प्रतिच्छेद करते हैं तथा ACD एक सरल रेखा है, तब x, y और z के मान ज्ञात कीजिए।



हल दी गई आकृति में, $x = \frac{1}{2} \times \angle APB = \frac{1}{2} \times 150^\circ = 75^\circ$

$\therefore ACD$ एक रेखा है।

$$\therefore \angle BCD = 180^\circ - x = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$$

$\therefore BCDE$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।

$$\therefore y + \angle BCD = 180^\circ \Rightarrow y + 105^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow y = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$$

$$\text{तथा } z = 2y = 2 \times 75^\circ = 150^\circ$$

13. $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है तथा एक वृत्त बिन्दुओं A और B से इस प्रकार खींचा जाता है कि यह AD को P पर तथा BC को Q पर प्रतिच्छेद करता है तब सिद्ध कीजिए कि P, Q, C और D चक्रीय चतुर्भुज है।

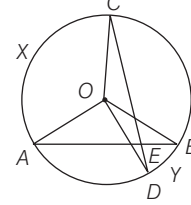
□□□

हल पाठ्यपुस्तक में NCERT प्रश्न देखें।

14. दी गई आकृति में, AB तथा CD वृत्त की दो जीवाएँ एक-दूसरे को बिन्दु 'E' पर प्रतिच्छेद करती हैं, तब सिद्ध कीजिए कि

$$\angle AEC = \frac{1}{2} \times (\text{चाप } CXA \text{ द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण} + \text{चाप } DYB \text{ द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण})$$

DYB द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण)



हल ΔOAC में,

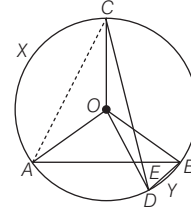
$$OA = OC$$

$$\therefore \angle OAC = \angle OCA \quad \dots(i)$$

ΔOAB में,

$$OA = OB$$

$$\therefore \angle OAB = \angle OBA \quad \dots(ii)$$



ΔOCD में,

$$OC = OD$$

$$\therefore \angle OCD = \angle ODC \quad \dots(iii)$$

$$\text{तथा } \angle AEC = \angle DEB \quad [\text{शीर्षाभिमुख कोण}] \dots(iv)$$

चित्र से,

$$\angle AOC = 180^\circ - (\angle OAC + \angle OCA) \quad \dots(v)$$

$$\angle DOB = 180^\circ - (\angle OBD + \angle ODB)$$

$$= 180^\circ - (\angle OBA + \angle EBD + \angle ODC + \angle EDB)$$

$$= 180^\circ - [\angle OAB + \angle OCD + \angle EDB + \angle EDB]$$

[समी (ii) व (iii) से]

$$= 180^\circ - [\angle OAB + \angle OCD + 180^\circ - \angle DEB] \quad [\Delta DEB \text{ से}]$$

$$\angle DOB = \angle AEC - (\angle OAB + \angle OCD) \quad \dots(vi)$$

अब, समी (v) तथा (vi) से

$$\angle AOC + \angle DOB = 180^\circ - (\angle OAC + \angle OCA)$$

$$+ \angle AEC - (\angle OAB + \angle OCD)$$

$$= 180^\circ - (\angle OAC + \angle OAB + \angle OCA + \angle OCD) + \angle AEC$$

$$= 180^\circ - (\angle EAC + \angle ECA) + \angle AEC$$

$$= \angle AEC + \angle AEC$$

$$\Rightarrow \angle AOC + \angle DOB = 2\angle AEC$$

$$\Rightarrow \angle AEC = \frac{1}{2}$$

(चाप CXA द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण + चाप DYB द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण) इति सिद्धम्

प्रश्नावली 10.1

1. उस समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका आधार 8 सेमी और बराबर भुजाओं में से एक भुजा 6 सेमी हो।

हल दिया है, समद्विबाहु त्रिभुज का आधार, $a = 8$ सेमी,

बराबर भुजा में से एक भुजा, $b = 6$ सेमी,

अब, समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned} &= \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{4} \\ &= \frac{8 \times \sqrt{4(6)^2 - (8)^2}}{4} \\ &= \frac{8 \times \sqrt{144 - 64}}{4} \\ &= 8\sqrt{5} \text{ सेमी}^2 \end{aligned}$$

2. समबाहु त्रिभुज की प्रत्येक भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल $9\sqrt{3}$ सेमी² है।

हल दिया है, समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= 9\sqrt{3} \text{ सेमी}^2$$

माना समबाहु त्रिभुज की भुजा a है।

$$\text{अब, समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$\Rightarrow 9\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{9\sqrt{3} \times 4}{\sqrt{3}} = 36$$

$$\Rightarrow a = 6 \text{ सेमी}$$

3. समबाहु त्रिभुज की एक भुजा 4 सेमी है, तब इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, समबाहु त्रिभुज की भुजा (a) = 4 सेमी

$$\text{अब, समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} (4)^2 = 4\sqrt{3} \text{ सेमी}^2$$

4. समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजा $2\sqrt{3}$ सेमी है।

हल दिया है, समबाहु त्रिभुज की भुजा $a = 2\sqrt{3}$ सेमी

$$\text{अब, समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} (2\sqrt{3})^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 \times 3 = 3\sqrt{3} \text{ सेमी}^2$$

5. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका आधार 25 सेमी एवं उसकी संगत ऊँचाई 10.8 सेमी है।

हल दिया है, त्रिभुज का आधार = 25 सेमी

तथा संगत ऊँचाई = 10.8 सेमी

$$\text{अब, त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$$

$$= \frac{1}{2} \times 25 \times 10.8 = 135 \text{ सेमी}^2$$

6. 35 सेमी आधार वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल 420 सेमी² है, तब शीर्षलम्ब ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, त्रिभुज का आधार = 35 सेमी

तथा क्षेत्रफल = 420 सेमी²

$$\text{अब, त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{शीर्षलम्ब}$$

$$\Rightarrow 420 = \frac{1}{2} \times 35 \times \text{शीर्षलम्ब}$$

$$\Rightarrow \text{शीर्षलम्ब} = \frac{420 \times 2}{35} = 24 \text{ सेमी}$$

7. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका आधार व शीर्षलम्ब क्रमशः 5 सेमी और 4 सेमी है।

हल दिया है, त्रिभुज का आधार = 5 सेमी

तथा शीर्षलम्ब = 4 सेमी

अब, त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{शीर्षलम्ब}$$

$$= \frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10 \text{ सेमी}^2$$

8. भुजा $2a$ के समबाहु त्रिभुज का अर्द्ध-परिमाप ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, समबाहु त्रिभुज की भुजा = $2a$

\therefore समबाहु त्रिभुज का परिमाप = $3 \times$ भुजा

$$= 3 \times 2a = 6a$$

अब, समबाहु त्रिभुज का अर्द्ध-परिमाप

$$= \frac{1}{2} \times \text{त्रिभुज का परिमाप} = \frac{1}{2} \times 6a = 3a$$

9. यदि किसी समद्विबाहु त्रिभुज का आधार b तथा प्रत्येक बराबर भुजा a है, तब इसका परिमाप ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, समद्विबाहु त्रिभुज का आधार $= b$,

प्रत्येक बराबर भुजा $= a$

अब, त्रिभुज का परिमाप

$$= \text{आधार} + 2 \times \text{बराबर भुजा}$$

$$= b + 2a = 2a + b$$

10. किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ 8 सेमी व 11 सेमी हैं तथा त्रिभुज का परिमाप 32 सेमी है, तब तीसरी भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, त्रिभुज की दो भुजाएँ $a = 8$ सेमी, $b = 11$ सेमी

तथा त्रिभुज का परिमाप $= 32$ सेमी

माना तीसरी भुजा c है।

अब, त्रिभुज का परिमाप $= a + b + c$

$$\Rightarrow 32 = 8 + 11 + c$$

$$\Rightarrow c = 32 - 19 = 13 \text{ सेमी}$$

अतः तीसरी भुजा 13 सेमी है।

11. त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजाएँ क्रमशः

(i) 8 सेमी, 9 सेमी, 13 सेमी

(ii) 7 सेमी, 9 सेमी, 14 सेमी

(iii) 5 सेमी, 8 सेमी, 13 सेमी

(iv) 12 सेमी, 13 सेमी, 5 सेमी

हल (i) दिया है, त्रिभुज की भुजाएँ $a = 8$ सेमी, $b = 9$ सेमी, $c = 13$ सेमी

\therefore त्रिभुज का अर्द्ध-परिमाप,

$$s = \frac{a + b + c}{2} = \frac{8 + 9 + 13}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ सेमी}$$

अब, हीरोन सूत्र से,

$$\begin{aligned} \text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{15(15-8)(15-9)(15-13)} \\ &= \sqrt{15 \times 7 \times 6 \times 2} \\ &= 6\sqrt{35} \text{ सेमी}^2 \end{aligned}$$

(ii), (iii) तथा (iv), भाग (i) भाग की भाँति स्वयं हल करें।

12. त्रिभुज की भुजाएँ 7 सेमी, 9 सेमी और 14 सेमी हैं, तब इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, त्रिभुज की भुजाएँ $a = 7$ सेमी,

$b = 9$ सेमी, $c = 14$ सेमी

\therefore त्रिभुज का अर्द्ध-परिमाप,

$$s = \frac{a + b + c}{2} = \frac{7 + 9 + 14}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

अब, हीरोन सूत्र से,

त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{15(15-7)(15-9)(15-14)} \\ &= \sqrt{15 \times 8 \times 6 \times 1} = 12\sqrt{5} \text{ सेमी}^2 \end{aligned}$$

13. एक त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाई क्रमशः 35 सेमी, 54 सेमी और 61 सेमी है, तब इसका क्षेत्रफल व सबसे छोटे शीर्षलम्ब की लम्बाई भी ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, त्रिभुज की भुजाएँ $a = 35$ सेमी,

$b = 54$ सेमी, $c = 61$ सेमी

\therefore त्रिभुज का अर्द्ध-परिमाप, $s = \frac{a + b + c}{2}$

$$= \frac{35 + 54 + 61}{2} = \frac{150}{2} = 75$$

अब, हीरोन सूत्र से,

$$\begin{aligned} \text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{75(75-35)(75-54)(75-61)} \\ &= \sqrt{75 \times 40 \times 21 \times 14} \\ &= \sqrt{(25 \times 3) \times (2 \times 4 \times 5) \times (3 \times 7) \times (2 \times 7)} \\ &= 420\sqrt{5} \\ &= 939.15 \text{ सेमी}^2 \end{aligned}$$

\therefore त्रिभुज की भुजा $c = 61$ सेमी सबसे बड़ी है।

\therefore इस भुजा के संगत शीर्ष लम्ब सबसे छोटा होगा।

अब, त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ सबसे बड़ी भुजा \times संगत शीर्षलम्ब

$$\Rightarrow 939.15 = \frac{1}{2} \times 61 \times \text{शीर्षलम्ब}$$

$$\therefore \text{शीर्षलम्ब} = \frac{939.15 \times 2}{61} = 30.79 \text{ सेमी}$$

14. समबाहु त्रिभुज का परिमाप 72 मी है, तब इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, समबाहु त्रिभुज का परिमाप $= 72$ मी

माना समबाहु त्रिभुज की भुजा a है।

अब, समबाहु त्रिभुज का परिमाप $= 3a$

$$\Rightarrow 72 = 3a$$

$$\Rightarrow a = \frac{72}{3} = 24 \text{ मी}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल} &= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (24)^2 \\ &= 144\sqrt{3} \text{ मी}^2 \end{aligned}$$

15. समबाहु त्रिभुज की एक भुजा 8 सेमी है, तब हीरोन सूत्र द्वारा इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। साथ ही, शीर्षलम्ब भी ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, समबाहु त्रिभुज की एक भुजा $a = 8$ सेमी

\therefore अन्य दो भुजाएँ $b = 8$ सेमी, $c = 8$ सेमी तथा त्रिभुज का अर्द्ध-परिमाप,

$$s = \frac{a + b + c}{2} = \frac{8 + 8 + 8}{2} = 12$$

अब, हीरोन सूत्र से,

$$\begin{aligned} \text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{12(12-8)(12-8)(12-8)} \\ &= \sqrt{12 \times 4 \times 4 \times 4} \\ &= 16\sqrt{3} \text{ सेमी}^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{शीर्षलम्ब}$$

$$\Rightarrow 16\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 8 \times \text{शीर्षलम्ब}$$

$$\Rightarrow \text{शीर्षलम्ब} = \frac{16\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \text{ सेमी}$$

16. यदि समद्विबाहु त्रिभुज का परिमाप 40 सेमी एवं बराबर भुजाओं में से एक 14 सेमी है, तब त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, समद्विबाहु त्रिभुज का परिमाप = 40 सेमी

बराबर भुजाओं में से एक भुजा $b = 14$ सेमी

माना त्रिभुज का आधार a सेमी है।

अब, त्रिभुज का परिमाप = $a + 2b$

$$\Rightarrow 40 = a + 2 \times 14$$

$$\Rightarrow a = 40 - 28 = 12 \text{ सेमी}$$

$$\begin{aligned} \text{तथा त्रिभुज का क्षेत्रफल} &= \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{4} = \frac{12\sqrt{4(14)^2 - (12)^2}}{4} \\ &= 3 \times \sqrt{784 - 144} \\ &= 3 \times \sqrt{640} = 24\sqrt{10} \text{ सेमी}^2 \end{aligned}$$

17. त्रिभुजाकार भाग का परिमाप 420 मी तथा इसकी भुजाओं का अनुपात 6 : 7 : 8 है, तब त्रिभुजाकार भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, त्रिभुजाकार भाग का परिमाप = 420 मी

माना भाग की भुजाएँ $6x$, $7x$ तथा $8x$ हैं।

\therefore त्रिभुजाकार भाग का परिमाप = $6x + 7x + 8x$

$$\Rightarrow 420 = 21x$$

$$\Rightarrow x = \frac{420}{21} = 20$$

अतः त्रिभुजाकार भाग की भुजाएँ 120, 140, 160 हैं।

$$\text{भाग का अर्द्ध-परिमाप, } s = \frac{420}{2} = 210 \text{ मी}$$

तथा भुजाएँ $a = 120$, $b = 140$, $c = 160$ मी

अब, हीरोन सूत्र से,

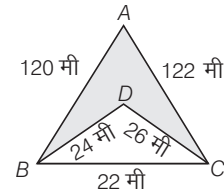
त्रिभुजाकार भाग का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{210(210-120)(210-140)(210-160)} \\ &= \sqrt{210 \times 90 \times 70 \times 50} \\ &= \sqrt{(70 \times 3) \times (3 \times 15 \times 2) \times (70) \times (2 \times 25)} \\ &= 70 \times 3 \times 2 \times 5\sqrt{15} \\ &= 2100\sqrt{15} \text{ मी}^2 \end{aligned}$$

18. यदि त्रिभुज की भुजाएँ 20 सेमी, 24 सेमी और 28 सेमी हो, तब इसके सबसे लम्बे शीर्षलम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल प्रश्न 13 की भाँति स्वयं हल करें।

19. निम्न आकृति में, छायांकित भाग के क्षेत्र की गणना कीजिए।



हल दी गई आकृति में, $\triangle ABC$ की भुजाएँ $a = 120$, $b = 122$, $c = 22$ मी हैं।

$$\begin{aligned} \therefore \text{त्रिभुज का अर्द्ध-परिमाप, } s &= \frac{a + b + c}{2} = \frac{120 + 122 + 22}{2} \\ &= 132 \text{ मी} \end{aligned}$$

$\triangle ABC$ का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{132(132-120)(132-122)(132-22)} \\ &= \sqrt{132 \times 12 \times 10 \times 110} \\ &= 1320 \text{ मी}^2 \end{aligned}$$

अब, आकृति में, $\triangle BCD$ की भुजाएँ $a = 24$,

$$b = 26, c = 22 \text{ मी}$$

$$\text{त्रिभुज का अर्द्ध-परिमाप, } s = \frac{a + b + c}{2} = \frac{24 + 26 + 22}{2} = 36 \text{ मी}$$

$\triangle BCD$ का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{36(36-24)(36-26)(36-22)} \\ &= \sqrt{36 \times 12 \times 10 \times 14} \\ &= 24\sqrt{105} = 24 \times 10.22 \\ &= 245.28 \text{ मी}^2 \end{aligned}$$

छायांकित भाग का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned} &= \triangle ABC \text{ का क्षेत्रफल} - \triangle BDC \text{ का क्षेत्रफल} \\ &= 1320 - 245.28 \\ &= 1074.72 \text{ मी}^2 \end{aligned}$$

प्रश्नावली 11.1

1. एक शंकु की त्रिज्या एवं ऊर्ध्वाधर ऊँचाई क्रमशः 5 सेमी और 12 सेमी है इसका वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$)

हल दिया है, शंकु की त्रिज्या (r) = 5 सेमी

तथा ऊँचाई (h) = 12 सेमी

$$\begin{aligned} \text{शंकु की तिर्यक ऊँचाई } (l) &= \sqrt{r^2 + h^2} \\ &= \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13 \text{ सेमी} \end{aligned}$$

अब, शंकु का वक्रपृष्ठ = $\pi r l$

$$= 3.14 \times 5 \times 13 = 204.10 \text{ सेमी}^2$$

2. उस शंकु का वक्रपृष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके आधार का क्षेत्रफल एवं ऊँचाई क्रमशः 154 सेमी² और 24 सेमी हैं।

हल दिया है, शंकु के आधार का क्षेत्रफल

= 154 सेमी² तथा ऊँचाई (h) = 24 सेमी

माना शंकु के आधार की त्रिज्या = r सेमी

\therefore शंकु के आधार का क्षेत्रफल = πr^2

$$\Rightarrow 154 = \frac{22}{7} \times r^2$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{154 \times 7}{22} = 49$$

$$\Rightarrow r = 7 \text{ सेमी}$$

$$\begin{aligned} \text{शंकु की तिर्यक ऊँचाई } (l) &= \sqrt{r^2 + h^2} \\ &= \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} = 25 \end{aligned}$$

अब, शंकु का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल = $\pi r l$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 25 = 550 \text{ सेमी}^2$$

3. उस शंकु का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके आधार की परिधि एवं तिर्यक ऊँचाई क्रमशः 88 सेमी और 2 सेमी हैं।

हल दिया है, शंकु के आधार की परिधि = 88 सेमी, तिर्यक ऊँचाई, $l = 2$ सेमी

माना शंकु के आधार की त्रिज्या = r सेमी

\therefore शंकु के आधार (वृत्त) की परिधि = $2\pi r$

$$\Rightarrow 88 = 2 \times \frac{22}{7} \times r$$

$$\Rightarrow r = \frac{88 \times 7}{2 \times 22} = 14 \text{ सेमी}$$

अब, शंकु का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल = $\pi r l$

$$= \frac{22}{7} \times 14 \times 2 = 88 \text{ सेमी}^2$$

वैकल्पिक विधि

$$\begin{aligned} \text{शंकु का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल} &= \frac{1}{2} \times \text{आधार की परिधि} \times \text{तिर्यक ऊँचाई} \\ &= \frac{1}{2} \times 88 \times 2 = 88 \text{ सेमी}^2 \end{aligned}$$

4. एक शंकु के आधार का व्यास तथा ऊँचाई क्रमशः 14 सेमी और 24 सेमी है, तब शंकु का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, शंकु के आधार का व्यास = 14 सेमी तथा ऊँचाई (h) = 24 सेमी

$$\therefore \text{शंकु के आधार की त्रिज्या } (r) = \frac{14}{2} = 7 \text{ सेमी}$$

$$\begin{aligned} \text{शंकु की तिर्यक ऊँचाई } (l) &= \sqrt{r^2 + h^2} \\ &= \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} \\ &= 25 \text{ सेमी} \end{aligned}$$

अब, शंकु का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल = $\pi r l$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 25 = 550 \text{ सेमी}^2$$

5. 16 मी ऊँचाई के एक ठोस शंकु के आधार की परिधि 33 मी है, तब शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)

हल दिया है, शंकु की ऊँचाई (h) = 16 मी

तथा शंकु के आधार की परिधि = 33 मी

माना शंकु के आधार की त्रिज्या = r मी

\therefore शंकु के आधार की परिधि = $2\pi r$

$$\Rightarrow 33 = 2 \times \frac{22}{7} \times r$$

$$\Rightarrow r = \frac{33 \times 7}{2 \times 22} = \frac{21}{4} \text{ मी} = 5.25 \text{ मी}$$

$$\begin{aligned} \text{शंकु की तिर्यक ऊँचाई } (l) &= \sqrt{r^2 + h^2} \\ &= \sqrt{(5.25)^2 + (16)^2} = \sqrt{283.56} \\ &= 16.81 \text{ मी} \end{aligned}$$

अब, शंकु सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\pi r (l + r)$

$$= \frac{22}{7} \times 5.25 (16.81 + 5.25)$$

$$= 364.485 \text{ मी}^2$$

6. लम्बवृत्तीय शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए, यदि

(i) $l = 24$ सेमी, $h = 21$ सेमी

(ii) $l = 13$ सेमी, $h = 15$ सेमी

(iii) $l = 5$ सेमी, $h = 3$ सेमी

(iv) $l = 2.5$ सेमी, $h = 15$ सेमी

हल (i) दिया है,

$$l = 24 \text{ सेमी, } h = 21 \text{ सेमी}$$

$$\therefore l = \sqrt{r^2 + h^2} \quad [\text{जहाँ } r \text{ शंकु की त्रिज्या है}]$$

$$\Rightarrow 24 = \sqrt{r^2 + 441}$$

$$\Rightarrow r^2 = 576 - 441 \quad [\text{दोनों पक्षों का वर्ग करने पर}]$$

$$\Rightarrow r^2 = 135$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{135} \text{ सेमी}$$

$$\text{अब, शंकु का आयतन} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 135 \times 21 = 2970 \text{ सेमी}^3$$

(ii), (iii), (iv), भाग (i) की भाँति स्वयं हल करें।

7. यदि एक शंकु की ऊँचाई एवं आयतन क्रमशः 15 सेमी और 500π सेमी³ है, तब शंकु के आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, शंकु की ऊँचाई, $h = 15$ सेमी

$$\text{तथा शंकु का आयतन} = 500\pi \text{ सेमी}^3$$

$$\text{माना शंकु की त्रिज्या} = r \text{ सेमी}$$

$$\therefore \text{शंकु का आयतन} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$\Rightarrow 500\pi = \frac{1}{3} \pi \times r^2 \times 15$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{500 \times 3}{15} = 100$$

$$\Rightarrow r = 10 \text{ सेमी}$$

8. यदि एक लम्बवृत्तीय शंकु का आयतन एवं आधार का क्षेत्रफल क्रमशः 48π सेमी² तथा 12π सेमी² है, तब शंकु की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, शंकु का आयतन = 48π सेमी²

$$\text{तथा आधार का क्षेत्रफल} = 12\pi \text{ सेमी}^2$$

$$\text{माना शंकु की ऊँचाई} = h \text{ सेमी}$$

$$\text{तथा आधार की त्रिज्या} = r \text{ सेमी}$$

$$\therefore \text{शंकु के आधार का क्षेत्रफल} = \pi r^2$$

$$\Rightarrow 12\pi = \pi r^2$$

$$\Rightarrow r^2 = 12$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{12} \text{ सेमी}$$

$$\text{अब, शंकु का आयतन} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$\Rightarrow 48\pi = \frac{1}{3} \pi \times 12 \times h$$

$$\Rightarrow h = \frac{48 \times 3}{12} = 12 \text{ सेमी}$$

9. यदि एक शंकु की ऊँचाई एवं त्रिज्या को तीन गुना कर दिया जाए, तब नये शंकु के आयतन एवं वास्तविक शंकु के आयतन का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल माना वास्तविक शंकु की त्रिज्या r तथा ऊँचाई h सेमी है।

$$\therefore \text{शंकु का वास्तविक आयतन} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$\text{शंकु की नई ऊँचाई} = 3h, \text{ त्रिज्या} = 3r$$

$$\text{नए शंकु का आयतन} = \frac{1}{3} \pi (3r)^2 (3h)$$

$$= 27 \times \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$= 27 \times \text{वास्तविक आयतन}$$

$$\text{अब, } \frac{\text{नए शंकु का आयतन}}{\text{वास्तविक शंकु का आयतन}} = \frac{27}{1}$$

अतः अभीष्ट अनुपात 27 : 1 है।

10. एक शंक्वाकार बर्तन की धारिता (लीटर में) ज्ञात कीजिए जिसकी ऊँचाई 8 सेमी तथा तिर्यक ऊँचाई 10 सेमी है।

हल दिया है,

$$\text{शंक्वाकार बर्तन की ऊँचाई (} h \text{)} = 8 \text{ सेमी,}$$

$$\text{तिर्यक ऊँचाई (} l \text{)} = 10 \text{ सेमी}$$

$$\text{माना बर्तन की त्रिज्या} = r \text{ सेमी}$$

$$\therefore l^2 = r^2 + h^2$$

$$\Rightarrow 100 = r^2 + 64$$

$$\Rightarrow r^2 = 100 - 64 = 36$$

$$\Rightarrow r = 6 \text{ सेमी}$$

$$\text{अब, शंक्वाकार बर्तन की धारिता} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 36 \times 8 \text{ सेमी}^3$$

$$= \frac{22 \times 36 \times 8}{3 \times 7 \times 10000} \text{ लीटर}$$

$$= 0.30171 \text{ लीटर}$$

11. एक 9 सेमी भुजा वाले घन से काटे जा सकने वाले सबसे बड़े लम्बवृत्तीय शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, घन की भुजा = 9 सेमी,

$$\text{घन से काटे गए बड़े-से-बड़े शंकु की ऊँचाई}$$

$$(h) = 9 \text{ तथा त्रिज्या (} r \text{)} = \frac{9}{2} \text{ सेमी}$$

$$\text{अब, शंकु का आयतन} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{81}{4} \times 9 = 190.93 \text{ सेमी}^3$$

12. 3.5 सेमी त्रिज्या व 12 सेमी ऊँचाई वाली शंक्वाकार कोन में कितनी आइसक्रीम आएगी।

हल दिया है, शंक्वाकार कोन की त्रिज्या

$$(r) = 3.5 \text{ सेमी, ऊँचाई (} h \text{)} = 12 \text{ सेमी}$$

$$\text{अब, शंक्वाकार कोन में आने वाली आइसक्रीम का आयतन}$$

$$= \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (3.5)^2 \times 12$$

$$= 154 \text{ सेमी}^3$$

प्रश्नावली 11.2

1. अर्द्धगोलों का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिनकी त्रिज्याएँ क्रमशः

- (i) 10 सेमी (ii) 22 सेमी
(iii) 14 सेमी (iv) 18 सेमी

हल (i) दिया है, अर्द्धगोले की त्रिज्या, $r = 10$ सेमी

$$\therefore \text{अर्द्धगोले का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल} = 2\pi r^2$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 100$$

$$= 628.57 \text{ सेमी}^2$$

(ii), (iii) तथा (iv), भाग (i) की भाँति स्वयं हल करें।

2. गोलों का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिनकी त्रिज्याएँ क्रमशः

- (i) 3.5 सेमी (ii) 5.6 सेमी
(iii) 10 सेमी (iv) 2.5 सेमी

हल (i) दिया है, गोले की त्रिज्या (r) = 3.5 सेमी

$$\therefore \text{गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 4\pi r^2$$

$$= 4 \times \frac{22}{7} \times (3.5)^2$$

$$= 154 \text{ सेमी}^2$$

(ii), (iii) तथा (iv), भाग (i) की भाँति स्वयं हल करें।

3. अर्द्धगोलों का सम्पूर्ण पृष्ठ ज्ञात कीजिए जिनके व्यास क्रमशः

- (i) 12 सेमी (ii) 22 सेमी
(iii) 7.5 सेमी (iv) 14 सेमी

हल (i) दिया है, अर्द्धगोले का व्यास = 12 सेमी

$$\therefore \text{अर्द्धगोले की त्रिज्या } (r) = \frac{12}{2} = 6 \text{ सेमी}$$

$$\text{अब, अर्द्धगोले का सम्पूर्ण पृष्ठ} = 3\pi r^2$$

$$= 3 \times \frac{22}{7} \times (6)^2$$

$$= 339.42 \text{ सेमी}^2$$

(ii), (iii) तथा (iv), भाग (i) की भाँति स्वयं हल करें।

4. एक खिलौना अर्द्धगोले के आकार में है जिसकी त्रिज्या 3.5 सेमी है, तब इसका वक्रपृष्ठ तथा सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, अर्द्धगोलाकार खिलौने की त्रिज्या (r) = 3.5 सेमी

$$\therefore \text{खिलौने का वक्रपृष्ठ} = 2\pi r^2$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times (3.5)^2$$

$$= 77 \text{ सेमी}^2$$

$$\text{तथा खिलौने का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 3\pi r^2$$

$$= 3 \times \frac{22}{7} \times (3.5)^2$$

$$= 115.5 \text{ सेमी}^2$$

5. यदि एक गोले की त्रिज्या दोगुनी कर दी जाती है, तब प्रथम गोले एवं दूसरे गोले के आयतनों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल माना प्रथम गोले की त्रिज्या = r सेमी

$$\therefore \text{प्रथम गोले का आयतन} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\therefore \text{दूसरे गोले की त्रिज्या} = 2r \text{ सेमी}$$

$$\therefore \text{दूसरे गोले का आयतन} = \frac{4}{3}\pi (2r)^3$$

$$= 8 \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\text{अब, } \frac{\text{प्रथम गोले का आयतन}}{\text{दूसरे गोले का आयतन}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{8 \times \frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{1}{8}$$

अतः अभीष्ट अनुपात 1 : 8 है।

6. उन गोलों का आयतन ज्ञात कीजिए जिनके व्यास क्रमशः

- (i) 2.1 सेमी (ii) 32 सेमी
(iii) 8 सेमी (iv) 12 सेमी
(v) 9 सेमी

हल (i) दिया है, गोले का व्यास = 2.1 सेमी

$$\therefore \text{गोले की त्रिज्या } r = \frac{2.1}{2} \text{ सेमी}$$

$$\text{अब, गोले का आयतन} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{2.1}{2}\right)^3$$

$$= 4.851 \text{ सेमी}^3$$

(ii), (iii), (iv), (v), भाग (i) की भाँति स्वयं हल करें।

7. एक दुकानदार के पास 10 सेमी त्रिज्या का एक लड्डू है इसे तोड़कर 5 सेमी त्रिज्या के कितने लड्डू बनाए जा सकते हैं?

हल दिया है, बड़े लड्डू की त्रिज्या (R) = 10 सेमी

तथा छोटे लड्डू की त्रिज्या, $r = 5$ सेमी

अब, बड़े लड्डू को तोड़कर बनाए गए छोटे लड्डूओं की संख्या

$$= \frac{\text{बड़े लड्डू का आयतन}}{\text{छोटे लड्डू का आयतन}}$$

$$= \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{R^3}{r^3}$$

$$= \frac{(10)^3}{(5)^3} = 8$$

8. अर्द्धगोलों का आयतन ज्ञात कीजिए जिनकी त्रिज्याएँ क्रमशः

- (i) 22 सेमी (ii) 14 सेमी
(iii) 9 सेमी (iv) 25 सेमी

हल (i) दिया है, अर्द्धगोले की त्रिज्या (r) = 22 सेमी

$$\begin{aligned} \therefore \text{अर्द्धगोले का आयतन} &= \frac{2}{3} \pi r^3 \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times (22)^3 \\ &= 22310.09 \text{ सेमी}^3 \end{aligned}$$

(ii), (iii), (iv), भाग (i) की भाँति स्वयं हल करें।

9. अर्द्धगोलाकार कटोरे के किनारों की परिधि 132 सेमी है, तब कटोरे का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, अर्द्धगोलाकार कटोरे के किनारों की परिधि = 132 सेमी

माना कटोरे की त्रिज्या = r

\therefore कटोरे की परिधि = $2\pi r$

$$\Rightarrow 132 = 2 \times \frac{22}{7} \times r$$

$$\Rightarrow r = \frac{132 \times 7}{2 \times 22} = 21 \text{ सेमी}$$

अब, अर्द्धगोलाकार कटोरे का आयतन = $\frac{2}{3} \pi r^3$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \times 21$$

$$= 19404 \text{ सेमी}^3$$

10. दो अर्द्धगोलों के आयतनों का अनुपात 27:125 है, तब त्रिज्याओं का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, दो अर्द्धगोलों के आयतनों का अनुपात

$$= 27 : 125$$

माना गोलों की त्रिज्याएँ r_1 तथा r_2 हैं।

$$\therefore \frac{\text{पहले अर्द्धगोले का आयतन}}{\text{दूसरे अर्द्धगोले का आयतन}} = \frac{\frac{2}{3} \pi r_1^3}{\frac{2}{3} \pi r_2^3}$$

$$\Rightarrow \frac{27}{125} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

$$\Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{3}{5} \quad [\text{घनमूल लेने पर}]$$

$$\Rightarrow r_1 : r_2 = 3 : 5$$

अतः त्रिज्याओं का अनुपात 3 : 5 है।

11. यदि एक बेलन जिसकी ऊँचाई इसके व्यास की $\frac{2}{3}$ गुनी है तथा

आयतन 4 सेमी त्रिज्या के गोले के आयतन के समान है, तब बेलन के आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, गोले की त्रिज्या (R) = 4 सेमी

माना बेलन की त्रिज्या r तथा ऊँचाई h है।

प्रश्नानुसार,

बेलन की ऊँचाई = $\frac{2}{3} \times$ बेलन का व्यास

$$\Rightarrow h = \frac{2}{3} \times 2r$$

$$\Rightarrow h = \frac{4}{3} r \quad \dots(i)$$

अब, पुनः प्रश्नानुसार

बेलन का आयतन = गोले का आयतन

$$\Rightarrow \pi r^2 h = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$\Rightarrow r^2 \cdot \left(\frac{4}{3} r\right) = \frac{4}{3} \times (4)^3 \quad [\text{समी (i) से}]$$

$$\Rightarrow r^3 = (4)^3$$

$$\Rightarrow r = 4 \text{ सेमी} \quad [\text{घनमूल लेने पर}]$$

अतः बेलन के आधार की त्रिज्या 4 सेमी है।

12. यदि गोले की त्रिज्या को तीन गुना कर दिया जाए, तब नये गोले के आयतन एवं वास्तविक गोले के आयतन का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल माना गोले की त्रिज्या = r

$$\therefore \text{गोले का आयतन} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

प्रश्नानुसार,

नये गोले की त्रिज्या = $3r$

$$\therefore \text{नये गोले का आयतन} = \frac{4}{3} \pi (3r)^3$$

$$= 27 \times \frac{4}{3} \pi r^3$$

= $27 \times$ वास्तविक गोले का आयतन

$$\Rightarrow \frac{\text{वास्तविक गोले का आयतन}}{\text{नये गोले का आयतन}} = \frac{1}{27}$$

अतः अभीष्ट अनुपात 1 : 27 है।

13. दो गोले के आयतनों का अनुपात 64 : 27 है, तब इनकी त्रिज्याओं का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, दो गोलों के आयतनों का अनुपात 64 : 27 है।

माना गोलों की त्रिज्याएँ r_1 तथा r_2 हैं।

$$\therefore \frac{\text{पहले गोले का आयतन}}{\text{दूसरे गोले का आयतन}} = \frac{\frac{4}{3} \pi r_1^3}{\frac{4}{3} \pi r_2^3}$$

$$\Rightarrow \frac{64}{27} = \frac{r_1^3}{r_2^3} \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow r_1 : r_2 = 4 : 3$$

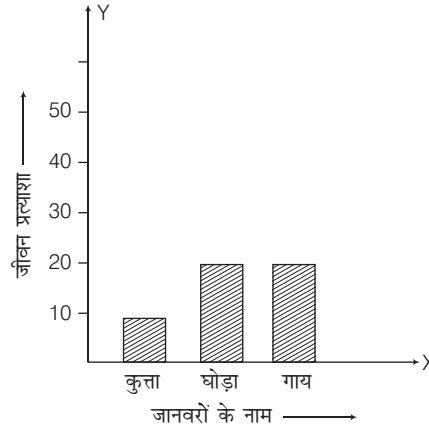
अतः त्रिज्याओं का अनुपात 4 : 3 है।



1. निम्नलिखित पशुओं की जीवन प्रत्याशा से सम्बन्धित आँकड़ों को दण्ड आलेख रूप में निरूपित कीजिए।

पशुओं के नाम	जीवन प्रत्याशा
कुत्ता	10
घोड़ा	20
गाय	20

हल यहाँ, तीन जानवरों के नाम दिए हैं, अतः क्षैतिज अक्ष (X -अक्ष) पर समान दूरी पर 3 समान चौड़ाई के दण्ड बनाते हैं, जिनकी ऊँचाइयाँ उनकी जीवन प्रत्याशा के मान के समानुपाती है।



2. किसी स्थान पर 50 विद्यार्थी, अपने घर से विद्यालय जाने के विभिन्न परिवहन साधनों का उपयोग करते हैं जो निम्नवत् हैं

परिवहन के साधन	विद्यार्थियों की संख्या
बस	16
मोटर साइकिल	20
रिक्शा	8
अन्य	6

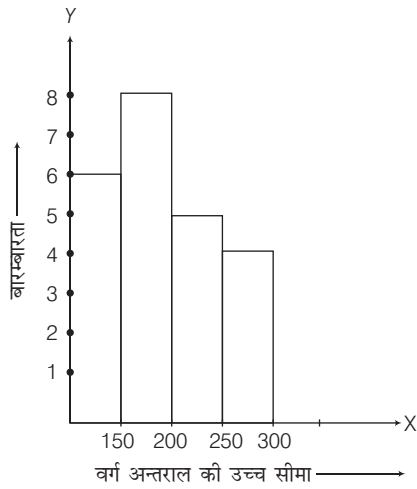
उपरोक्त आँकड़ों का दण्ड आलेख बनाइए।

हल प्रश्न संख्या 1 की भाँति स्वयं हल करें।

3. निम्नलिखित आँकड़ों का आयत चित्र निर्मित कीजिए।

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता
100-150	6
150-200	8
200-250	5
250-300	4

हल यहाँ, उचित पैमाना लेकर वर्ग अन्तराल को X -अक्ष के अनुदिश तथा बारम्बारताओं को Y -अक्ष के अनुदिश निरूपित करते हैं।



4. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए, आयत चित्र बनाइए।

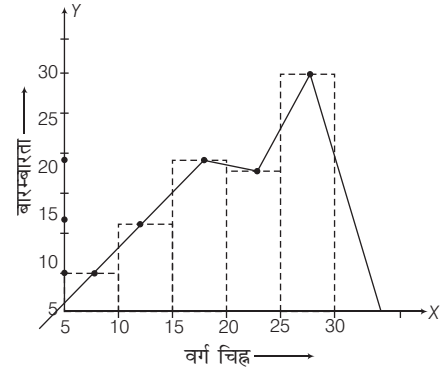
वर्ग अन्तराल	2-4	4-6	6-8	8-12	12-20
बारम्बारता	8	10	22	24	6

हल प्रश्न 3 की भाँति स्वयं हल करें।

5. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए, बारम्बारता बहुभुज की रचना कीजिए।

वर्ग चिह्न	बारम्बारता
5	5
10	12
15	18
20	17
25	22
30	27

हल यहाँ उचित पैमाना लेकर वर्ग चिह्न को X-अक्ष के अनुदिश तथा बारम्बारताओं को Y-अक्ष के अनुदिश निरूपित करते हैं। आयत चित्र खींचकर दण्डों के शीर्षों के मध्य-बिन्दुओं को मिलाते हैं।



6. किसी विद्यालय में 206 विद्यार्थियों के दैनिक व्यय का विवरण निम्नवत् है

दैनिक व्यय (₹ में)	विद्यार्थियों की संख्या (बारम्बारता)
0-5	10
5-10	16
10-15	30
15-20	42
20-25	50
25-30	30
30-35	16
40-45	12

उपरोक्त आँकड़ों से बारम्बारता बहुभुज की रचना कीजिए।

हल प्रश्न 5 की भाँति स्वयं हल करें।