गणित

गाइड

कक्षा
10

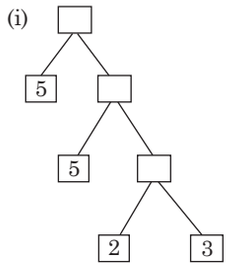
1

वास्तविक संख्याएँ

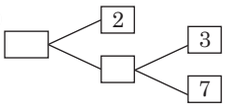
प्रश्नावली 1.1

1. निम्नलिखित गुणनखण्ड वृक्ष में लुप्त संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

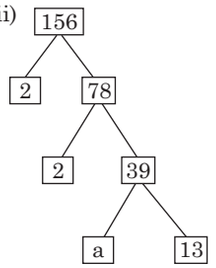
(i)



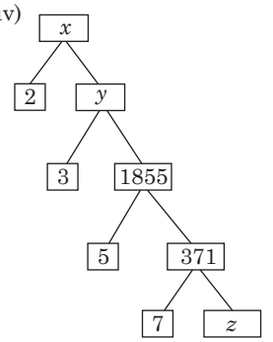
(ii)



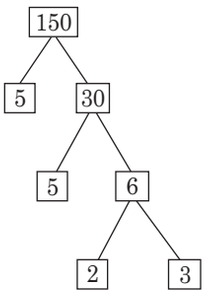
(iii)



(iv)

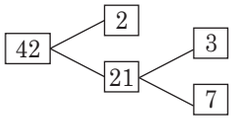


हल (i) दिए गए गुणनखण्ड वृक्ष को पूरा करने पर,



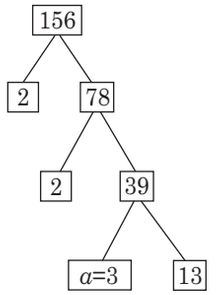
अत: गुणनखण्ड वृक्ष में लुप्त संख्याएँ 150, 30 तथा 6 हैं।

(ii) दिए गए गुणनखण्ड वृक्ष को पूरा करने पर,



अत: गुणनखण्ड वृक्ष में लुप्त संख्याएँ 42 तथा 21 हैं।

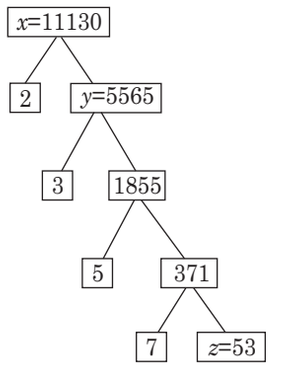
(iii)



गुणनखण्ड वृक्ष को पूरा करने के लिए,

$a = 3$

(iv)

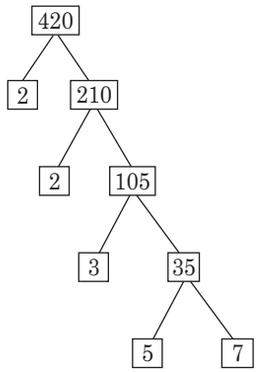


गुणनखण्ड वृक्ष को पूरा करने के लिए, $x = 11130$, $y = 5565$ तथा $z = 53$ है।

2. गुणनखण्ड वृक्ष के प्रयोग से निम्नलिखित संख्याओं के गुणनखण्ड कीजिए।

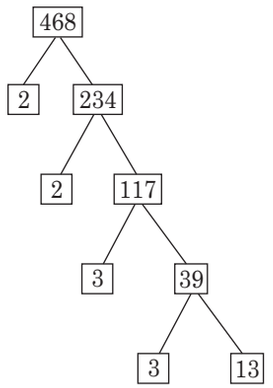
(i) 420 (ii) 468 (iii) 1008 (iv) 735

हल (i)



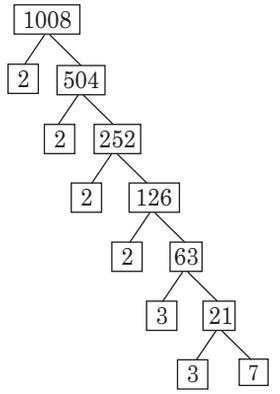
अत: $420 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$

(ii)



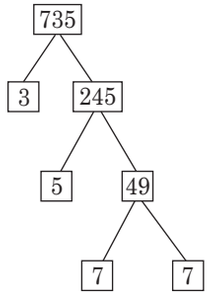
अत: $468 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 13$

(iii)



अत: $1008 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7$

(iv)



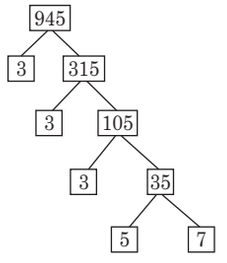
अत: $735 = 3 \times 5 \times 7 \times 7$

3. निम्नलिखित संख्याओं को अभाज्य गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में लिखिए।

(i) 945 (ii) 650 (iii) 2644 (iv) 7325

(v) 20570 (vi) 874944

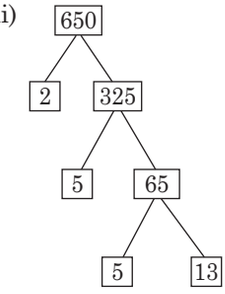
हल (i)



इस प्रकार 945 को अभाज्य गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$945 = 3^3 \times 5 \times 7$$

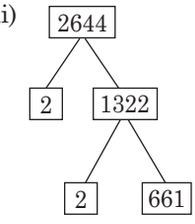
(ii)



इस प्रकार 650 को अभाज्य गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$650 = 2 \times 5^2 \times 13$$

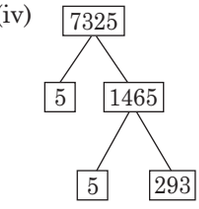
(iii)



इस प्रकार 2644 को अभाज्य गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$2644 = 2^2 \times 661$$

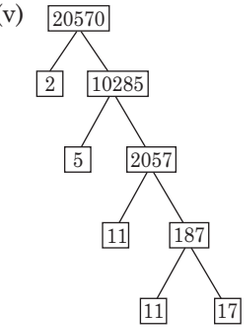
(iv)



इस प्रकार 7325 को अभाज्य गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$7325 = 5^2 \times 293$$

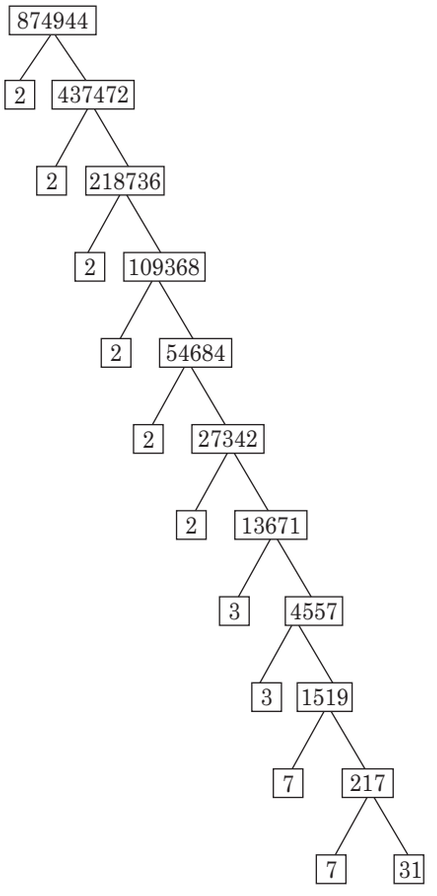
(v)



इस प्रकार 20570 को अभाज्य गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$20570 = 2 \times 5 \times 11^2 \times 17$$

(vi)



इस प्रकार 874944 को अभाज्य गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$874944 = 2^6 \times 3^2 \times 7^2 \times 31$$

4. व्याख्या कीजिए कि निम्नलिखित संख्याएँ अभाज्य संख्या हैं या भाज्य संख्या हैं

(i) $5 \times 7 \times 11 \times 13 + 11$

(ii) $3 \times 5 \times 13 \times 46 + 23$

हल (i) दिया है, $5 \times 7 \times 11 \times 13 + 11$

$$= 65065 + 11 = 65076$$

अब, $65076 = 2^2 \times 3 \times 11 \times 17 \times 29$

[अभाज्य गुणनखण्ड के रूप में लिखने पर]

इस प्रकार दी गई संख्या अभाज्य गुणनखण्डों का गुणनफल है।

अत: यह भाज्य संख्या है।

(ii) दिया है, $3 \times 5 \times 13 \times 46 + 23$

$$= 8970 + 23 = 8993$$

अब, $8993 = 17 \times 23^2$

इस प्रकार दी गई संख्या अभाज्य गुणनखण्डों का गुणनफल है।

अत: यह भाज्य संख्या है।

5. जाँच कीजिए कि क्या किसी भी प्राकृत संख्या n के लिए 32^n शून्य पर समाप्त हो सकता है? कारण बताइए।

हल *नहीं*, माना $a = 32^n$

$n = 1$ पर, $a = 32^1 = 32$

$n = 2$ पर, $a = 32 \times 32 = 1024$

इस प्रकार, n के किसी भी मान के लिए 32^n शून्य पर समाप्त नहीं हो सकता है। क्योंकि 32^n का इकाई अंक 2 है, जिसकी किसी घात का मान शून्य नहीं हो सकता है।

6. सिद्ध कीजिए कि 16^n का अन्त अंक 0 या 5 से नहीं हो सकता है, जहाँ n एक प्राकृत संख्या है।

हल माना $a = 16^n$

$n = 1$ पर, $a = (16)^1 = 16$

$n = 2$ पर, $a = (16)^2 = 256$

.....

इस प्रकार, स्पष्ट है कि n के किसी भी मान के लिए 16^n का अन्त अंक (अर्थात् इकाई अंक) 0 या 5 नहीं हो सकता है।

7. यदि दो धनात्मक पूर्णांकों p और q को $p = ab^3$ तथा $q = a^3$ के रूप में व्यक्त करें, जहाँ a, b अभाज्य संख्याएँ हैं, तो ल.स. होगा

हल दिया है, $p = ab^3 = a \times b \times b \times b$

तथा $q = a^3 = a \times a \times a$

$\therefore$ p तथा q का ल.स. $= a^3b^3$ [अधिकतम घात लेने पर]

8. अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा 96 तथा 404 का म.स. ज्ञात कीजिए।

हल 96 तथा 404 के अभाज्य गुणनखण्ड लिखने पर,

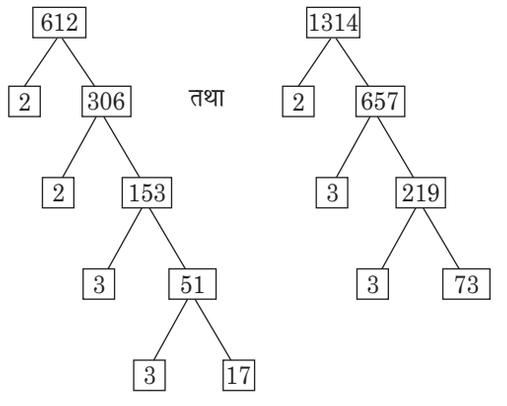
$$96 = 2^5 \times 3$$

$$404 = 2^2 \times 101$$

96 तथा 104 का म.स. $= 2^2 = 4$

9. गुणनखण्ड वृक्ष का प्रयोग करके 612 तथा 1314 के गुणनखण्ड कीजिए तथा इनका म.स. तथा ल.स. ज्ञात कीजिए।

हल



$612 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 17$

$1314 = 2 \times 3 \times 3 \times 73$

म.स. $= 2 \times 3 \times 3 = 18$ तथा

ल.स. $= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 17 \times 73 = 44676$

10. अभाज्य गुणनखण्डों का प्रयोग करके 60, 84 तथा 108 का म.स. तथा ल.स. ज्ञात कीजिए।

हल $60 = 2^2 \times 3 \times 5$

$84 = 2^2 \times 3 \times 7$

$108 = 2^2 \times 3^3$

म.स. $= 2^2 \times 3 = 12$

तथा ल.स. $= 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7 = 3780$

11. एक आयताकार मैदान 18 मी 72 सेमी लम्बा तथा 13 मी 20 सेमी चौड़ा है। इसमें एक ही माप की वर्गाकार टाइल लगानी है। इस प्रकार की टाइलों की न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए।

हल मैदान की लम्बाई $= 18$ मी 72 सेमी $= 1872$ सेमी

$= 2^4 \times 3^2 \times 13$ सेमी

[अभाज्य गुणनखण्डों के रूप में]

मैदान की चौड़ाई $= 13$ मी 20 सेमी

$= 1320$ सेमी

$= 2^3 \times 3 \times 5 \times 11$ सेमी

[अभाज्य गुणनखण्डों के रूप में]

न्यूनतम टाइलों की संख्या के लिए वर्गाकार टाइल की भुजा की लम्बाई

$=$ म.स. $= 2^3 \times 3$ सेमी

$$\text{टाइलों की संख्या} = \frac{\text{मैदान का क्षेत्रफल}}{\text{टाइल का क्षेत्रफल}}$$

$$= \frac{\text{लम्बाई} \times \text{चौड़ाई}}{(\text{भुजा})^2}$$

$$= \frac{2^4 \times 3^2 \times 13 \times 2^3 \times 3 \times 5 \times 11}{(2^3 \times 3)^2}$$

$= 4290$

12. यदि लघुत्तम समापवर्त्य (77, 99) = 693 है, तो म.स. (77, 99) ज्ञात कीजिए।

हल $\because$ म.स. $\times$ ल.स. $=$ पहली संख्या $\times$ दूसरी संख्या

$$\therefore \quad \text{म.स.} = \frac{77 \times 99}{693} \qquad \text{[मान रखने पर]}$$

$= 11$

13. यदि संख्याओं 150 तथा 100 का म.स. 50 है, तो इनका ल.स. ज्ञात कीजिए।

हल $$\text{ल.स.} = \frac{\text{पहली संख्या} \times \text{दूसरी संख्या}}{\text{म.स.}}$$

$$= \frac{150 \times 100}{50} \qquad \text{[मान रखने पर]}$$

$= 300$

14. संख्याओं 92 और 510 का ल.स. ज्ञात कीजिए। ल.स. का उपयोग करके इनका म.स. भी ज्ञात कीजिए।

हल 92 और 510 को अभाज्य गुणनखण्डों के रूप में लिखने पर,

$92 = 2^2 \times 23$

तथा $510 = 2 \times 3 \times 5 \times 17$

$\therefore$ ल.स. $= 2^2 \times 3 \times 5 \times 17 \times 23$

$= 23460$

अब, $$\text{म.स.} = \frac{\text{पहली संख्या} \times \text{दूसरी संख्या}}{\text{ल.स.}}$$

$$= \frac{92 \times 510}{23460} = 2$$

15. यदि म.स. (253, 440) = 11 तथा ल.स. (253, 440) = $253 \times R$ हो, तो R का मान ज्ञात कीजिए।

हल $$\text{ल.स.} = \frac{\text{पहली संख्या} \times \text{दूसरी संख्या}}{\text{म.स.}}$$

$$253 \times R = \frac{253 \times 440}{11} \qquad \text{[मान रखने पर]}$$

$$\therefore \quad R = \frac{253 \times 440}{11 \times 253} = 40$$

प्रश्नावली 1.2

1. (i) क्या एक परिमेय संख्या और एक अपरिमेय संख्या का गुणनफल एक परिमेय संख्या होता है?

(ii) क्या दो अपरिमेय संख्याओं का गुणनफल एक परिमेय संख्या या अपरिमेय संख्या होती है? उदाहरण देकर स्पष्ट कीजिए।

हल (i) *नहीं*, माना $p = \frac{2}{3}$ एक परिमेय संख्या है

तथा $q = \sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है,

अब, $pq = \frac{2}{3} \times \sqrt{3}$

$= \frac{2}{\sqrt{3}}$, जो एक परिमेय संख्या नहीं है।

अत: एक परिमेय और एक अपरिमेय संख्या का गुणनफल एक परिमेय संख्या नहीं होती है।

(ii) *हाँ*, माना $5 + \sqrt{2}$ तथा $5 - \sqrt{2}$ दो अपरिमेय संख्या हैं,

अब, $(5 + \sqrt{2}) \times (5 - \sqrt{2}) = 25 - 2$

$= 23$, जोकि एक परिमेय संख्या है।

पुन: माना $\sqrt{2}$ तथा $\sqrt{3}$ दो अपरिमेय संख्या हैं।

अब, $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$, जो एक अपरिमेय संख्या है।

2. दिखाइए कि निम्नलिखित में से प्रत्येक अपरिमेय संख्या है

(i) $\sqrt{3}$ (ii) $5\sqrt{7}$

(iii) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ (iv) $1-\sqrt{7}$

(v) $6+\sqrt{2}$ (vi) $5-\sqrt{2}$

हल (i) माना $\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है।

$\therefore \quad \sqrt{3}=\frac{p}{q}$ [परिमेय संख्या की परिभाषा से]

जहाँ, p तथा q सह-अभाज्य संख्याएँ हैं।

(या उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं रखती हैं)

या $p=\sqrt{3}q$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$p^2=3q^2$

इस प्रकार 3, p^2 का एक गुणनखण्ड है, जो p का भी गुणनखण्ड होगा।

पुन: माना $p=3R$

$\therefore \quad 3q^2=9R^2$

$q^2=3R^2$

इस प्रकार 3, q^2 का एक गुणनखण्ड है, जो q का भी गुणनखण्ड होगा।

$\therefore$ 3, p तथा q दोनों का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है जो विरोधाभास है।

अत: $\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या नहीं है, अर्थात् $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

(ii) माना $5\sqrt{7}$ एक परिमेय संख्या है।

$\therefore \quad 5\sqrt{7}=\frac{p}{q}$

[जहाँ, p तथा q उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं रखती हैं]

या $p=5\sqrt{7}q$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$p^2=25\times 7q^2$

इस प्रकार 7, p^2 का एक गुणनखण्ड है, जो p का भी गुणनखण्ड होगा।

पुन: माना $p=5\times 7R$

$\therefore \quad 25\times 7q^2=25\times 49R^2$

$\Rightarrow \quad q^2=7R^2$

इस प्रकार 7, q^2 का एक गुणनखण्ड है, जो q का भी गुणनखण्ड होगा।

$\therefore$ 7, p तथा q दोनों का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है जो विरोधाभास है।

अत: $5\sqrt{7}$ एक परिमेय संख्या नहीं है, अर्थात् $5\sqrt{7}$ एक अपरिमेय संख्या है।

(iii) माना $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ एक परिमेय संख्या है

$\therefore \sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या होगी।

$\sqrt{3}=\frac{p}{q}$

[जहाँ p तथा q उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं रखती हैं]

आगे विद्यार्थी भाग (i) की भाँति स्वयं हल करें।

(iv) दी गई संख्या $1-\sqrt{7}$ है।

माना $1-\sqrt{7}$ एक परिमेय संख्या है।

$\therefore \sqrt{7}$ एक परिमेय संख्या होगी

[$\because$ दो परिमेय संख्याओं का अन्तर परिमेय संख्या होती है]

आगे विद्यार्थी भाग (ii) की भाँति स्वयं हल करें।

(v) माना $6+\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

$\therefore \sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या होगी।

[$\because$ दो परिमेय संख्याओं का अन्तर सदैव परिमेय संख्या होती है।]

$\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ [जहाँ, p तथा q उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं रखती हैं]

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$p^2=2q^2$

इस प्रकार 2, p^2 का गुणनखण्ड है, जो p का भी गुणनखण्ड होगा

पुन: माना $p=2R$

$\therefore \quad 2q^2=4R^2 \Rightarrow q^2=2R^2$

इस प्रकार 2, q^2 का एक गुणनखण्ड है, जो q का भी गुणनखण्ड होगा।

$\therefore$ 2, p तथा q दोनों का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है जो विरोधाभास है।

इस प्रकार, $\sqrt{2}$ परिमेय संख्या नहीं है।

$\therefore 6+\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या नहीं है।

अत: $6+\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या नहीं है। (अर्थात् अपरिमेय संख्या है।)

(vi) विद्यार्थी भाग (v) की भाँति स्वयं हल करें।

3. सिद्ध कीजिए कि $2\sqrt{3}+\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है तथा जाँच कीजिए कि $(2\sqrt{3}+\sqrt{5})(2\sqrt{3}-\sqrt{5})$ परिमेय या अपरिमेय संख्या है।

हल दी गई संख्या $2\sqrt{3}+\sqrt{5}$ है।

माना $a=2\sqrt{3}+\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है,

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$a^2=12+5+6\sqrt{15}$

$a^2=17+6\sqrt{15}$ भी परिमेय संख्या होगी

पुन: माना $\sqrt{15}=\frac{p}{q}$

[जहाँ, p तथा q उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं रखती हैं]

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$p^2 = 15q^2$$

इस प्रकार 15, p^2 का गुणनखण्ड है जो p का भी गुणनखण्ड होगा।

पुन: माना $p = 15R$

$\therefore \quad 15q^2 = 225R^2$

$\Rightarrow \quad q^2 = 15R^2$

इस प्रकार 15, q^2 का गुणनखण्ड है जो q का भी गुणनखण्ड होगा।

$\therefore$ 15, p तथा q दोनों का गुणनखण्ड है जो विरोधाभास है।

इस प्रकार $\sqrt{15}$ परिमेय संख्या नहीं है।

$\therefore \ 17 + 6\sqrt{15}$ भी परिमेय संख्या नहीं होगी।

अत: $2\sqrt{3} + \sqrt{5}$ परमेय संख्या नहीं है, अर्थात् अपरिमेय संख्या है।

अब, $(2\sqrt{3} + \sqrt{5})(2\sqrt{3} - \sqrt{5})$

$= (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2$

$= 12 - 5$

$= 7$, जोकि परिमेय संख्या है।

4. यदि 0.3528 को $\frac{p}{2^m 5^n}$ के रूप में व्यक्त किया जाए, तो n, m और p के न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

हल संख्या $0.3528 = \frac{3528}{(10)^4} = \frac{2^3 \times 441}{2^4 \times 5^4} = \frac{441}{2 \times 5^4}$

प्रश्नानुसार, $\frac{441}{2 \times 5^4} = \frac{p}{2^m 5^n}$

दोनों पक्षों की तुलना करने पर,

$n = 4, m = 1$ तथा $p = 441$

5. $\left(\frac{15}{4} + \frac{5}{40}\right)$ को भाग दिए बिना दशमलव रूप में लिखिए।

हल $\frac{15}{4} + \frac{5}{40} = \frac{15 \times 10 + 5}{40}$ [हर का ल.स. लेने पर]

$= \frac{155}{40} = \frac{155}{2^3 \times 5}$

[हर को अभाज्य गुणनखण्डों के रूप में लिखने पर]

$= \frac{155 \times 5^2}{2^3 \times 5^3} = \frac{3875}{(10)^3} = 3.875$

6. निम्न के हरों के अभाज्य गुणनखण्डों के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

(i) 34.12345 (ii) $34.\overline{5678}$

हल (i) $34.12345 = \frac{3412345}{(10)^5} = \frac{3412345}{2^5 \times 5^5}$

$\because$ संख्या का हर $2^n 5^m$ के रूप का है,

यह सांत दशमलव संख्या हैं।

(ii) $34.\overline{5678} = 34.56785678...$

इस संख्या का हर $2^n 5^m$ के रूप का नहीं हो सकता है।

अत: यह असांत आवर्ती संख्या है।

❐❐❐

2

बहुपद

प्रश्नावली 2.1

1. निम्नलिखित बहुपदों में से प्रत्येक बहुपद की घात बताइए।

(i) $7y^5 \quad 6y^2 \quad 1$ (ii) $\dfrac{y^4 \quad 3y^2 \quad y}{y}$

(iii) $3x^2 \quad 7x \quad 2$ (iv) $\dfrac{t^8 \quad 3t^7 \quad 2t^5 \quad 6t^2}{t^2}$

हल (i) दिया गया बहुपद $7y^5 \quad 6y^2 \quad 1$, चर y में है।

बहुपद में चर y की अधिकतम घात 5 है।

अत: बहुपद की घात 5 है।

(ii) दिया गया बहुपद $\dfrac{y^4 \quad 3y^2 \quad y}{y}$

$$\frac{y(y^3 \quad 3y \quad 1)}{y}$$

$y^3 \quad 3y \quad 1$,चर y में है।

बहुपद में चर y की अधिकतम घात 3 है।

अत: बहुपद की घात 3 है।

(iii) दिया गया बहुपद $3x^2 \quad 7x \quad 2$, चर x में है।

बहुपद में चर x की अधिकतम घात 2 है।

अत: बहुपद की घात 2 है।

(iv) दिया गया बहुपद $\dfrac{t^8 \quad 3t^7 \quad 2t^5 \quad 6t^2}{t^2}$

$$\frac{t^2(t^6 \quad 3t^5 \quad 2t^3 \quad 6)}{t^2}$$

$t^6 \quad 3t^5 \quad 2t^3 \quad 6$, चर t में है।

बहुपद में t की अधिकतम घात 6 है।

अत: बहुपद की घात 6 है।

2. निम्नलिखित बहुपदों में से प्रत्येक बहुपद का प्रकार घात के आधार पर कीजिए।

(i) $f(p) \quad 3 \quad p^2 \quad \sqrt{7}p$

(ii) $p(v) \quad \sqrt{3}v^4 \quad \dfrac{2}{3}v \quad 7$

(iii) $q(x) \quad \dfrac{\sqrt{2}}{5}x^3 \quad 1$

(iv) $r(x) \quad 3$

हल (i) दिए गए बहुपद $f(p) \quad 3 \quad p^2 \quad \sqrt{7}p$ में चर p की अधिकतम घात 2 है।

अत: बहुपद एक द्विघात बहुपद है।

(ii) दिए गए बहुपद $p(v) \quad \sqrt{3}v^4 \quad \dfrac{2}{3}v \quad 7$ में चर v की अधिकतम घात 4 है।

अत: बहुपद एक चतुर्घात बहुपद है।

(iii) दिए गए बहुपद $q(x) \quad \dfrac{\sqrt{2}}{5}x^3 \quad 1$ में चर x की अधिकतम घात 3 है।

अत: बहुपद एक त्रिघात बहुपद है।

(iv) दिए गए बहुपद $r(x) \quad 3$ में चर x की अधिकतम घात 0 (शून्य) है।

अत: बहुपद एक अचर बहुपद है।

3. k के किस मान के लिए बहुपद $2x^2 \quad x \quad k$ का शून्यक 3 होगा?

हल दिया गया बहुपद $2x^2 \quad x \quad k$

तथा बहुपद का शून्यक 3

बहुपद में $x \quad 3$ रखने पर,

शेषफल 0

$2(3)^2 \quad 3 \quad k \quad 0$

$18 \quad 3 \quad k \quad 0 \quad k \quad 21$

4. यदि बहुपद $f(x) \quad ax^2 \quad 3(a \quad 1)x \quad 1$ का एक शून्यक 2 है, तब a का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया गया बहुपद,

$f(x) \quad ax^2 \quad 3(a \quad 1)x \quad 1$

$\because$ बहुपद का शून्यक 2 [दिया है]

$f(2) \quad 0$

$a(2)^2 \quad 3(a \quad 1)(2) \quad 1 \quad 0$

$4a \quad 6a \quad 6 \quad 1 \quad 0 \qquad 2a \quad 5 \quad 0$

$2a \quad 5 \qquad a \quad \dfrac{5}{2}$

5. यदि बहुपद $3x^2 \quad 2kx \quad 2m$ के शून्यक 2 तथा 3 हैं, तब k तथा m का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया गया बहुपद $3x^2 \quad 2kx \quad 2m$

बहुपद के शून्यक 2 तथा 3 बहुपद में रखने पर शेषफल 0

$3(2)^2 \quad 2k(2) \quad 2m \quad 0 \qquad [\because x \quad 2]$

$$12 \quad 4k \quad 2m \quad 0$$
$$4k \quad 2m \quad 12 \qquad \ldots(i)$$

पुन: $x \quad 3$ रखने पर,

$$3(3)^2 \quad 2k(3) \quad 2m \quad 0$$
$$27 \quad 6k \quad 2m \quad 0$$
$$6k \quad 2m \quad 27 \qquad \ldots(ii)$$

समी (i) में से समी (ii) को घटाने पर,

$$2k \quad 15 \text{ या } k \quad \frac{15}{2}$$

अब, k का मान समी (i) में रखने पर,

$$4\,\frac{15}{2} \quad 2m \quad 12$$
$$2m \quad 12 \quad 30$$
$$2m \quad 18 \quad m \quad 9$$

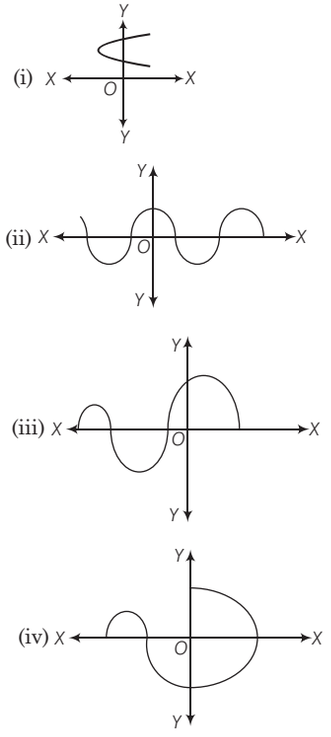
अत: $m \quad 9$ तथा $k \quad \frac{15}{2}$

6. बहुपद के शून्यकों के ज्यामितीय अर्थ को बताइए।

हल माना $y \quad f(x)$ कोई बहुपद है, यदि यह बहुपद 1 शून्यक रखता है तो वक्र $y \quad f(x)$, X-अक्ष को एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करेगा। यदि बहुपद 2 शून्यक रखता है तो वक्र $y \quad f(x)$, X-अक्ष को दो बिन्दु पर प्रतिच्छेद करेगा।

इस प्रकार स्पष्ट होता है कि किसी बहुपद के जितने शून्यक होंगे, उस बहुपद के वक्र में X-अक्ष पर उतने ही बिन्दु प्राप्त होंगे।

7. दिए गए चित्र में $y \quad p(x)$ का ग्राफ दिया गया है, जहाँ $p(x)$ एक बहुपद है। $p(x)$ के शून्यकों की संख्या ज्ञात कीजिए।



हल (i) दिए गए चित्र में ग्राफ X-अक्ष को प्रतिच्छेद नहीं करता है।

अत: शून्यकों की संख्या $\quad 0$ (शून्य)

(ii) दिए गए चित्र में ग्राफ X-अक्ष को 5 बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करता है।

अत: शून्यकों की संख्या $\quad 5$

(iii) दिए गए चित्र में ग्राफ X-अक्ष को 4 बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करता है।

अत: शून्यकों की संख्या $\quad 4$

(iv) दिए गए चित्र में ग्राफ X-अक्ष को 3 बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करता है।

अत: शून्यकों की संख्या $\quad 3$

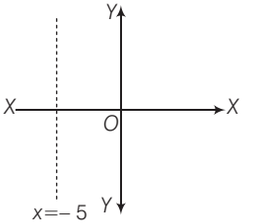
8. रैखिक बहुपद में $x \quad 5$ का ग्राफ निरूपित कीजिए तथा दिए गए बहुपद में शून्यक भी ज्ञात कीजिए।

हल दिया गया बहुपद $\quad x \quad 5$

अब, बहुपद को समीकरण (या वक्र) में परिवर्तित करके लिखने पर,

$$x \quad 5 \quad 0$$

या $\quad x \quad 5$ जोकि एक रेखा है।



ग्राफ से बहुपद का शून्यक $\quad 5$ [अर्थात् $x \quad 5$]

9. निम्नलिखित द्विघात बहुपद को ग्राफ पर निरूपित कीजिए तथा उनके शून्यक भी ज्ञात कीजिए।

(i) $x^2 \quad x \quad 6$ (ii) $x^2 \quad 6x \quad 9$

(iii) $y^2 \quad 4$ (iv) $3z^2 \quad z$

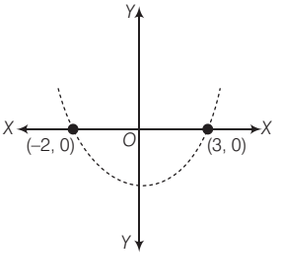
(v) $6x^2 \quad 7x \quad 2$ (vi) $2x^2 \quad 5x \quad 7$

हल (i) दिया गया द्विघात बहुपद $\quad x^2 \quad x \quad 6$

शून्यक ज्ञात करने के लिए,

$$x^2 \quad x \quad 6 \quad 0$$
$$x^2 \quad 3x \quad 2x \quad 6 \quad 0$$
$$x(x \quad 3) \quad 2(x \quad 3) \quad 0$$
$$(x \quad 3)(\ x \quad 2) \quad 0$$

या $\quad x \quad 3$ तथा $x \quad 2$

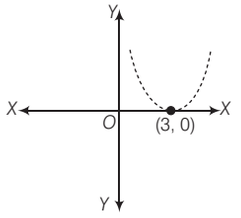


(ii) दिया गया द्विघात बहुपद $x^2 \quad 6x \quad 9$

शून्यक ज्ञात करने के लिए,

$x^2 \quad 6x \quad 9 \quad 0$

$(x \quad 3)^2 \quad 0$ या $x \quad 3, 3$

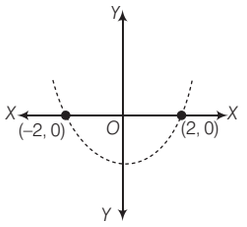


(iii) दिया गया द्विघात बहुपद $y^2 \quad 4$

शून्यक ज्ञात करने के लिए, $y^2 \quad 4 \quad 0$

$(y \quad 2)(y \quad 2) \quad 0$

या $y \quad 2$ तथा $\quad 2$

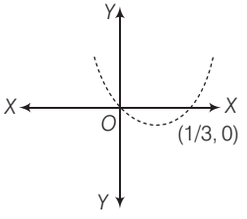


(iv) दिया गया द्विघात बहुपद $3z^2 \quad z$

शून्यक ज्ञात करने के लिए, $3z^2 \quad z \quad 0$

$z(3z \quad 1) \quad 0$

या $z \quad 0$ तथा $\frac{1}{3}$



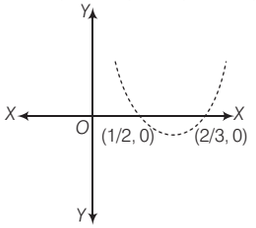
(v) दिया गया द्विघात बहुपद $6x^2 \quad 7x \quad 2$

शून्यक ज्ञात करने के लिए,

$6x^2 \quad 7x \quad 2 \quad 0$

$6x^2 \quad 4x \quad 3x \quad 2 \quad 0$

$2x(3x \quad 2) \quad 1(3x \quad 2) \quad 0$



$(3x \quad 2)(2x \quad 1) \quad 0$

या $x \quad \frac{2}{3}$ तथा $\frac{1}{2}$

(vi) दिया गया द्विघात बहुपद $2x^2 \quad 5x \quad 7$

शून्यक ज्ञात करने के लिए,

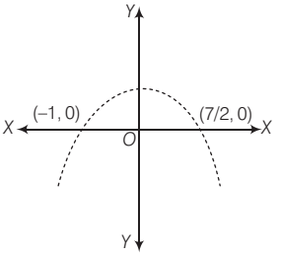
$2x^2 \quad 5x \quad 7 \quad 0$

$2x^2 \quad 7x \quad 2x \quad 7 \quad 0$

$x(\ 2x \quad 7) \quad 1(\ 2x \quad 7) \quad 0$

$(x \quad 1)(\ 2x \quad 7) \quad 0$

या $x \quad 1$ तथा $\frac{7}{2}$



10. निम्नलिखित द्विघात बहुपद के शून्यकों को ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के सम्बन्ध की सत्यता की जाँच कीजिए।

(i) $5x^2 \quad 8x \quad 4$ (ii) $x^2 \quad 20x \quad 91$

(iii) $x^2 \quad (\sqrt{2} \quad 1)x \quad \sqrt{2}$

(iv) $a(x^2 \quad 1) \quad x(a^2 \quad 1)$

हल (i) दिया गया बहुपद $5x^2 \quad 8x \quad 4$

$5x^2 \quad 10x \quad 2x \quad 4$

$5x(x \quad 2) \quad 2(x \quad 2)$

$(x \quad 2)(5x \quad 2)$

शून्यक ज्ञात करने के लिए,

$(x \quad 2)(5x \quad 2) \quad 0$

$x \quad 2 \quad 0$ और $5x \quad 2 \quad 0$

$x \quad 2$ और $x \quad \frac{2}{5}$

बहुपद के शून्यक 2 और $\frac{2}{5}$ हैं।

अब, शून्यकों का योगफल $\quad 2 \quad \frac{2}{5} \quad \frac{8}{5} \quad \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

तथा शून्यकों का गुणनफल

$(2) \quad \frac{2}{5} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

(ii) दिया गया बहुपद $x^2 \quad 20x \quad 91 \quad x^2 \quad 13x \quad 7x \quad 91$

$x(x \quad 13) \quad 7(x \quad 13)$

$(x \quad 13)(x \quad 7)$

शून्यक ज्ञात करने के लिए,

$(x \quad 13)(x \quad 7) \quad 0$

$x \quad 13 \quad 0$ और $x \quad 7 \quad 0$

$x \quad 13$ और $x \quad 7$

बहुपद के शून्यक 13 और 7 हैं।

अब, शून्यकों का योगफल

$13 \quad 7 \quad 20 \quad \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

तथा शून्यकों का गुणनफल

$(13)(7) \quad 91 \quad \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

(iii) दिया गया बहुपद $x^2 \quad (\sqrt{2} \quad 1)x \quad \sqrt{2}$

$x^2 \quad \sqrt{2}x \quad x \quad \sqrt{2}$

$x(x \quad \sqrt{2}) \quad 1(x \quad \sqrt{2})$

$(x \quad \sqrt{2})(x \quad 1)$

शून्यक ज्ञात करने के लिए,

$(x \quad \sqrt{2})(x \quad 1) \quad 0$

$x \quad \sqrt{2} \quad 0$ और $x \quad 1 \quad 0$

$x \quad \sqrt{2}$ और $x \quad 1$

बहुपद के शून्यक $\sqrt{2}$ और 1 हैं।

अब, शून्यकों का योगफल

$\sqrt{2} \quad 1 \quad \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

तथा शून्यकों का गुणनफल

$(\sqrt{2})(1) \quad \sqrt{2} \quad \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

(iv) दिया गया बहुपद $a(x^2 \quad 1) \quad x(a^2 \quad 1)$

$ax^2 \quad a \quad a^2x \quad x$

$ax^2 \quad a^2x \quad x \quad a$

$ax(x \quad a) \quad 1(x \quad a)$

$(x \quad a)(ax \quad 1)$

शून्यक ज्ञात करने के लिए,

$(x \quad a)(ax \quad 1) \quad 0$

$x \quad a \quad 0$ और $ax \quad 1 \quad 0$

$x \quad a$ और $x \quad \frac{1}{a}$

बहुपद के शून्यक a और $\frac{1}{a}$ हैं।

अब, शून्यकों का योगफल

$a \quad \frac{1}{a} \quad \frac{a^2 \quad 1}{a} \quad 1 \quad \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

तथा शून्यकों का गुणनफल

$(a) \quad \frac{1}{a} \quad \frac{a}{a} \quad 1 \quad \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

11. द्विघात बहुपद $y^2 \quad 92y \quad 1920$ के शून्यक ज्ञात कीजिए।

हल दिया गया बहुपद $y^2 \quad 92y \quad 1920$

$y^2 \quad 60y \quad 32y \quad 1920$

$y(y \quad 60) \quad 32(y \quad 60)$

$(y \quad 60)(y \quad 32)$

शून्यक ज्ञात करने के लिए,

$(y \quad 60)(y \quad 32) \quad 0$

$y \quad 60 \quad 0$ और $y \quad 32 \quad 0$

$y \quad 60$ और $y \quad 32$

अत: बहुपद के शून्यक 60 और 32 हैं।

12. यदि किसी बहुपद $x^2 \quad 7x \quad k$ के शून्यक तथा हैं, जहाँ 1, तब k का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया गया बहुपद $x^2 \quad 7x \quad k$

$\because$ बहुपद के शून्यक , हैं।

तब, शून्यकों का योगफल

$\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

$\frac{(\ 7)}{1} \quad 7$ ...(i)

तथा शून्यकों का गुणनफल $\frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

k ...(ii)

प्रश्नानुसार, 1 ...(iii)

समी (i) तथा (iii) को जोड़ने पर,

$2 \quad 8 \quad \frac{8}{2} \quad 4$

अब, का मान समी (i) में रखने पर,

$4 \quad 7 \quad 7 \quad 4 \quad 3$

समी (ii) से, $k \quad (4)(3) \quad 12$

13. यदि किसी बहुपद $2y^2 \quad 7y \quad 5$ के शून्यक तथा हैं, तब का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया गया बहुपद $2y^2 \quad 7y \quad 5$

$\because$ बहुपद के शून्यक तथा हैं।

तब, शून्यकों का योगफल

$\frac{y \text{ का गुणांक}}{y^2 \text{ का गुणांक}} \quad \because \quad \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

$\frac{7}{2}$ ...(i)

तथा शून्यकों का गुणनफल $\frac{\text{अचर पद}}{y^2 \text{ का गुणांक}}$

$\frac{5}{2}$ ...(ii)

अब, $\frac{7}{2}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{2}{2}$ 1

14. यदि किसी द्विघात बहुपद $f(x)$ $3x^2$ $5x$ 2 के शून्यक तथा हैं, तो ^{3} ^{3} का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया गया बहुपद $f(x)$ $3x^2$ $5x$ 2

∵ बहुपद के शून्यक तथा हैं।

तब, शून्यकों का योगफल,

$\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

$\frac{5}{3}$ ...(i)

तथा शून्यकों का गुणनफल,

$\frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

$\frac{2}{3}$

अब, ^{3} ^{3} ( )(^{2} ^{2})

( ) [^{2} ^{2} 2 2]

[2 को जोड़ने तथा घटाने पर]

( ) [( )^2 3]

$\frac{5}{3}$ $\frac{5}{3}^2$ 3 $\frac{2}{3}$ [मान रखने पर]

$\frac{5}{3}$ $\frac{25}{9}$ 2

$\frac{5}{3}$ $\frac{25 \quad 18)}{9}$

$\frac{5}{3}$ $\frac{43}{9}$ $\frac{215}{27}$

15. यदि त्रिघात बहुपद ax^3 $3x^2$ bx 6 के दो शून्यक 1 तथा 2 हैं। तब तीसरा शून्यक, a तथा b का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया गया बहुपद ax^3 $3x^2$ bx 6

तथा दो शून्यक 1, 2

माना तीसरा शून्यक है

तीनों शून्यकों का गुणनफल $\frac{\text{अचर पद}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$

$\frac{(\ 6)}{a}$

(1)(2)( ) $\frac{6}{a}$

2 $\frac{6}{a}$ ...(i)

दो-दो शून्यकों के गुणनफल का योग

$\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$

(1)(2) (2) (1) $\frac{b}{a}$

2 2 $\frac{b}{a}$

2 3 $\frac{b}{a}$ ...(ii)

शून्यकों का योगफल

$\frac{x^2 \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$

1 2 $\frac{3}{a}$

3 $\frac{3}{a}$

6 2 $\frac{6}{a}$ [2 से गुणा करने पर] ...(ii)

6 2 2 [समी (i) से]

4 6

$\frac{6}{4}$ $\frac{3}{2}$

समी (i) में रखने पर, 2 $\frac{3}{2}$ $\frac{6}{a}$

$3a$ 6 a 2

समी (ii) से, 2 3 $\frac{3}{2}$ $\frac{b}{2}$

2 $\frac{9}{2}$ $\frac{b}{2}$ $\frac{4 \quad 9}{2}$ $\frac{b}{2}$

$\frac{5}{2}$ $\frac{b}{2}$ b 5

अत: तीसरा शून्यक $\frac{3}{2}$ तथा a 2, b 5 है।

16. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों का योग तथा गुणनफल है

(i) 0 और $\sqrt{2}$ (ii) 2 $\sqrt{3}$ और 2 $\sqrt{3}$

हल (i) दिया है, शून्यकों का योग 0

तथा शून्यकों का गुणनफल $\sqrt{2}$

द्विघात बहुपद x^2 (शून्यकों का योग)x

शून्यकों का गुणनफल

x^2 $0x$ ($\sqrt{2}$) x^2 $\sqrt{2}$

(ii) दिया है, शून्यकों का योग 2 $\sqrt{3}$

तथा शून्यकों का गुणनफल 2 $\sqrt{3}$

द्विघात बहुपद x^2 (शून्यकों का योग)x

शून्यकों का गुणनफल

x^2 (2 $\sqrt{3}$)x (2 $\sqrt{3}$)

17. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों का योगफल तथा गुणनफल क्रमशः 8 तथा 12 है। तब बहुपद के शून्यकों को ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, शून्यकों का योगफल 8

तथा शून्यकों का गुणनफल 12

माना शून्यक तथा हैं, तब

तथा 12 ...(i)

द्विघात बहुपद x^2 (शून्यकों का योगफल) x

शून्यकों का गुणनफल

x^2 $8x$ 12

अब, सूत्र $\sqrt{(\quad)^2 \quad 4}$ से,

$\sqrt{(8)^2 \quad 4 \quad 12}$

[समी (i) से मान रखने पर]

$\sqrt{64 \quad 48}$ $\sqrt{16}$

4 ...(ii)

समी (i) से, 8 ...(iii)

समी (ii) व (iii) को जोड़ने पर,

2 12

$\frac{12}{2}$ 6

का मान समी (iii) में रखने पर, 6 8

8 6 2

अत: द्विघात बहुपद x^2 $8x$ 12 तथा शून्यक 6, 2 हैं।

18. द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यक $2\sqrt{7}$ तथा $5\sqrt{7}$ हैं।

हल दिए गए द्विघात बहुपद के शून्यक $2\sqrt{7}$ तथा $5\sqrt{7}$ हैं।

द्विघात बहुपद x^2 (शून्यकों का योगफल) x

(शून्यकों का गुणनफल)

x^2 $(2\sqrt{7} \quad 5\sqrt{7})x$ $(2\sqrt{7})(\ 5\sqrt{7})$

x^2 $3\sqrt{7}x$ 70

19. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए जिसके शून्यक 2 तथा 6 हैं। बहुपद के शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के सम्बन्ध की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल दिए गए द्विघात बहुपद के शून्यक 2 तथा 6 हैं।

सूत्र, द्विघात बहुपद x^2 (शून्यकों का योगफल)

x शून्यकों का गुणनफल

x^2 $(2 \quad 6)x$ $(2)(\ 6)$

x^2 $4x$ 12

अब, शून्यकों का योगफल

$2 \quad 6 \quad 4 \quad \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

तथा शून्यकों का गुणनफल

$(2)(\ 6) \quad 12 \quad \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

20. एक त्रिघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यक $\frac{2\ \sqrt{5}}{2}, \frac{2\ \sqrt{5}}{2}$ तथा 4 हैं।

हल माना त्रिघात बहुपद के शून्यक , तथा हैं।

तब प्रश्नानुसार, $\frac{2\ \sqrt{5}}{2}$, $\frac{2\ \sqrt{5}}{2}$ तथा 4

$\frac{2\ \sqrt{5}}{2} \quad \frac{2\ \sqrt{5}}{2}$ 4

$\frac{2\ \sqrt{5} \quad 2\ \sqrt{5} \quad 8}{2}$ [ल.स. लेने पर]

$\frac{12}{2}$ 6

$\frac{2\ \sqrt{5}}{2} \quad \frac{2\ \sqrt{5}}{2} \quad \frac{2\ \sqrt{5}}{2}$ 4

4 $\frac{2\ \sqrt{5}}{2}$

$\frac{1}{4}$ 4 $2\sqrt{5}$ 4 $2\sqrt{5}$

$\frac{1}{4}$ 8 $\frac{31}{4}$

तथा $\frac{2\ \sqrt{5}}{2} \quad \frac{2\ \sqrt{5}}{2}$ 4 1

अब, त्रिघात बहुपद

$k[x^3 \quad (\qquad)x^2 \quad (\qquad)x \qquad]$

[जहाँ, k एक शून्येत्तर अचर है]

$k\ x^3 \quad 6x^2 \quad \frac{31}{4}x \quad 1$

$\frac{k\,[4x^3 \quad 24x^2 \quad 31x \quad 4]}{4}$

$4x^3 \quad 24x^2 \quad 31x \quad 4$ (k 4 लेने पर)

21. यदि बहुपद $Lx^4 \quad Mx^3 \quad Nx^2 \quad Rx \quad P$, के शून्यक 1 तथा 1 हैं, तब सिद्ध कीजिए कि

$L \quad N \quad P \quad M \quad R$

हल दिया गया बहुपद

$Lx^4 \quad Mx^3 \quad Nx^2 \quad Rx \quad P$

∵ बहुपद के शून्यक 1 तथा 1 हैं।

अब, बहुपद में x 1 तथा x 1 रखने पर,

शेषफल 0

x 1 रखने पर,

$L(1)^4 \quad M(1)^3 \quad N(1)^2 \quad R(1) \quad P \quad 0$

$L \quad M \quad N \quad R \quad P \quad 0$ ...(i)

x 1 रखने पर,

$L(\ 1)^4 \quad M(\ 1)^3 \quad N(\ 1)^2 \quad R(\ 1) \quad P \quad 0$

$L \quad M \quad N \quad R \quad P \quad 0$ ...(ii)

समी (i) तथा (ii) को जोड़ने पर,

$2L \quad 2N \quad 2P \quad 0$

$L \quad N \quad P \quad 0$ ...(iii)

[2 से भाग देने पर]

यह मान समी (i) में रखने पर,

$M \quad R \quad 0$ ...(iv)

समी (iii) तथा (iv) से,

$L \quad N \quad P \quad M \quad R$

22. 2 तथा 5 शून्यकों वाले बहुपदों की संख्या कितनी होगी?

हल *अनन्त*, वह बहुपद जिसके शून्यक 2 तथा 5 हैं।

द्विघात बहुपद $x^2 \quad (2 \quad 5)x \quad (2)(5)$

$x^2 \quad 3x \quad 10$

त्रिघात बहुपद $(x \quad 1)(x^2 \quad 3x \quad 10)$,

$(x \quad 3)(x^2 \quad 3x \quad 10)$

इसी प्रकार अनन्त बहुपद हो सकते हैं।

23. यदि किसी द्विघात बहुपद $f(x) \quad x^2 \quad x \quad 2$ के शून्यक तथा हैं, तब एक ऐसा बहुपद ज्ञात कीजिए जिसके शून्यक (2 1) और (2 1) हैं।

हल दिए गए द्विघात बहुपद $f(x) \quad x^2 \quad x \quad 2$ के शून्यक तथा हैं।

तब, शून्यकों का योगफल

$$\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

1 ...(i)

शून्यकों का गुणनफल $\dfrac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

2 ...(ii)

प्रश्नानुसार, नए बहुपद के शून्यक 2 1 और 2 1 हैं।

तब, शून्यकों का योगफल 2 1 2 1

2( ) 2

2(1) 2 [समी (i) से]

2 2 0

तथा शून्यकों का गुणनफल (2 1)(2 1)

4 2 2 1

4 2( ) 1 4(2) 2(1) 1

8 2 1 10 1 9

नया बहुपद x^2 (शून्यकों का योगफल)x

शून्यकों का गुणनफल

$x^2 \quad 0x \quad 9 \quad x^2 \quad 9$

24. यदि बहुपद $p(x) \quad 6x^2 \quad x \quad 1$ के शून्यक तथा हैं, तब — — 2 $\frac{1}{}$ $\frac{1}{}$ 3 का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिए गए बहुपद $p(x) \quad 6x^2 \quad x \quad 1$ के शून्यक तथा हैं।

तब, शून्यकों का योगफल

$$\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$\frac{1}{6}$ ...(i)

तथा शून्यकों का गुणनफल

$\dfrac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}} \qquad \frac{1}{6}$ ...(ii)

अब, — — 2 $\frac{1}{}$ $\frac{1}{}$ 3

$\frac{2 \quad 2}{}$ 2$\frac{(\quad)}{}$ 3

[पहले दो पदों का ल.स. लेने पर]

$\frac{2 \quad 2 \quad 2 \quad 2}{} \quad \frac{2(\quad)}{}$ 3

[पहले पद के अंश में 2 जोड़ने तथा घटाने पर]

$\frac{(\quad)^2 \quad 2}{} \quad \frac{2(\quad)}{}$ 3

$$\frac{\frac{1}{6}^2 \quad 2\ \frac{1}{6} \quad 2\ \frac{1}{6}}{\frac{1}{6}} \quad \frac{}{\frac{1}{6}} \quad 3 \quad \frac{1}{6}$$

[समी (i) तथा (ii) से मान रखने पर]

$$\frac{\frac{1}{36} \quad \frac{2}{6}}{\frac{1}{6}} \quad 2 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{13}{6} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{2}{3}$$

25. यदि द्विघात बहुपद $f(x) \quad (x^2 \quad 3x \quad 2)$ के शून्यक और हैं, तब एक बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यक हैं

(i) $\frac{2}{}$ तथा $\frac{2}{}$ (ii) (2 3) तथा (3 2)

(iii) $\frac{^2}{}$ तथा $\frac{^2}{}$ (iv) $\frac{1}{2}$ तथा $\frac{1}{2}$

हल दिए गए द्विघात बहुपद $f(x) \quad (x^2 \quad 3x \quad 2)$ के शून्यक और हैं।

तब, शून्यकों का योगफल

$$\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

3 ...(i)

तथा शून्यकों का गुणनफल

$$\frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

2 ...(ii)

(i) ∵ नए बहुपद के शून्यक $\frac{2}{\quad}$ तथा $\frac{2}{\quad}$ हैं।

तब, शून्यकों का योगफल $\frac{2}{\quad}\ \frac{2}{\quad}$

$\frac{2\ ^2\ \ 2\ ^2}{\quad}$ [ल.स. लेने पर]

$\frac{2[\ ^2\ \ \ ^2]\ \ 2[\ ^2\ \ \ ^2\ \ 2\ \ \ 2\ ]}{\quad}$

[अंश में 2 जोड़ने तथा घटाने पर]

$\frac{2[(\ \ )^2\ \ 2\ ]}{\quad}$

$\frac{2[(3)^2\ \ 2(\ 2)]}{(\ 2)}$ [समी (i) तथा (ii) से]

$\frac{2(9\ \ 4)}{2}\ \ 13$

शून्यकों का गुणनफल $\frac{2}{\quad}\ \frac{2}{\quad}\ 4$

नया बहुपद x^2 (शून्यकों का योगफल)

x शून्यकों का गुणनफल

$x^2\ \ 13x\ \ 4$

(ii) ∵ नए बहुपद के शून्यक (2 3) तथा (3 2) हैं।

तब, शून्यकों का योगफल

$2\ \ 2\ \ 3\ \ 2$

$5\ \ 5\ \ 5(\ \ )$

$5(3)$ [समी (i) से]

15

तथा शून्यकों का गुणनफल

$(2\ \ 3\ )(3\ \ 2\ )\ \ 6\ ^2\ \ 4\ \ 9\ \ 6\ ^2$

$6\ ^2\ \ 6\ ^2\ \ 13\ \ 6\ ^2\ \ 6\ ^2\ \ 12$

$6(\ ^2\ \ \ ^2\ \ 2\ )\ \ 6(\ \ )^2$

$6(3)^2\ \ (\ 2)\ \ 54\ \ 2\ \ 52$

नया बहुपद x^2 (शून्यकों का योगफल)

x शून्यकों का गुणनफल

$x^2\ \ 15x\ \ 52$

(iii) ∵ नए बहुपद के शून्यक $\frac{\ ^2}{\quad}$ तथा $\frac{\ ^2}{\quad}$ हैं।

शून्यकों का योगफल $\frac{\ ^2}{\quad}\ \frac{\ ^2}{\quad}$

$\frac{\ ^3\ \ \ ^3}{\quad}\ \frac{(\ \ )(\ ^2\ \ \ ^2\ \ \ )}{\quad}$

$\frac{(\ \ )[\ ^2\ \ \ ^2\ \ 2\ \ \ 3\ )}{\quad}$

$\frac{(\ \ )[(\ \ )^2\ \ 3\ \ ]}{\quad}$

$\frac{(3)[(3)^2\ \ 3(\ 2)]}{(\ 2)}$ [समी (i) तथा (ii) से]

$\frac{3[9\ \ 6]}{(\ 2)}\ \ \frac{45}{2}$

तथा शून्यकों का गुणनफल $\frac{\ ^2}{\quad}\ \frac{\ ^2}{\quad}$

2 [समी (ii) से]

नया बहुपद k

[x^2 (शून्यकों का योगफल) x शून्यकों का गुणनफल]

[जहाँ, k एक शून्येत्तर अचर है]

$k\ x^2\ \ \frac{45}{2}x\ \ 2\ \ \frac{k[2x^2\ \ 45x\ \ 4]}{2}$

$2x^2\ \ 45x\ \ 4$ [k 2 लेने पर]

(iv) ∵ नए बहुपद के शून्यक $\frac{1}{2}$ तथा $\frac{1}{2}$ हैं।

शून्यकों का योगफल

$\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\ \ \frac{2\ \ \ \ \ 2}{(2\ \ \ )(2\ \ \ )}$

$\frac{3(\ \ \ )}{4\ \ \ 2\ ^2\ \ 2\ ^2}\ \ \frac{3(\ \ \ )}{2(\ ^2\ \ \ ^2\ \ 2\ \ )}$

$\frac{3(\ \ \ )}{2(\ \ \ )^2}$

$\frac{3(3)}{2(3)^2\ \ (\ 2)}$ [समी (i) तथा (ii) से]

$\frac{9}{18\ \ 2}\ \ \frac{9}{16}$

तथा शून्यकों का गुणनफल

$\frac{1}{(2\ \ \ )}\ \ \frac{1}{(2\ \ \ )}\ \ \frac{1}{4\ \ \ 2\ ^2\ \ 2\ ^2}$

$\frac{1}{2(\ ^2\ \ \ ^2\ \ 2\ \ )}$

$\frac{1}{2(\ \ \ )^2}\ \ \frac{1}{2(3)^2\ \ (\ 2)}$ [समी (i) तथा (ii) से]

$\frac{1}{18\ \ 2}\ \ \frac{1}{16}$

नया बहुपद $k[x^2$ (शून्यकों का योगफल) x शून्यकों का गुणफल]

[जहाँ, k एक शून्येत्तर अचर है]

$k\ x^2\ \ \frac{9}{16}x\ \ \frac{1}{16}$

$16x^2\ \ 9x\ \ 1$ [k 16 लेने पर]

❐❐❐

3

दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म

प्रश्नावली 3.1

1. अरूणा के पास केवल ₹ 1 तथा ₹ 5 के सिक्के हैं। यदि उसके पास सिक्कों की कुल संख्या 55 तथा कुल धनराशि ₹ 75 है, तो इस स्थिति को बीजगणितीय एवं ग्राफीय रूपों में व्यक्त कीजिए।

हल माना अरुणा के पास ₹ 1 के सिक्के x

तथा ₹ 5 के सिक्के y

प्रथम प्रतिबन्ध से,

$$x \quad y \quad 55$$

$$x \quad y \quad 55 \quad 0 \qquad \ldots(i)$$

द्वितीय प्रतिबन्ध से,

$$(1)(x) \quad (5)(y) \quad 75$$

$$x \quad 5y \quad 75 \quad 0 \qquad \ldots(ii)$$

अत: प्रश्न का बीजगणितीय निरूपण $x \quad y \quad 55 \quad 0$ तथा $x \quad 5y \quad 75 \quad 0$ है।

आलेखीय निरूपण करने के लिए समी (i) से,

$$y \quad x \quad 55$$

x	20	50
y	35	5

समी (ii) से,

$$y \quad \frac{75 \quad x}{5}$$

x	50	20
y	5	11

अब, विद्यार्थी ग्राफ **प्रश्न 1** की भाँति स्वयं खींचे।

2. आलेखीय विधि से जाँच कीजिए कि निम्न रैखिक समीकरणों के युग्म का कोई हल नहीं, अद्वितीय हल या अनन्त हल हैं।

$$15x \quad 30y \quad 1 \quad 0$$

$$3x \quad \frac{24}{4}y \quad \frac{1}{5} \quad 0$$

हल समीकरणों के युग्म का ग्राफ खींचने पर ज्ञात होता है कि वक्र प्रतिच्छेद नहीं करते, परन्तु दोनों के वक्र समान हैं (ग्राफ विद्यार्थी स्वयं बनाएँ)

अत: अनन्त हल हैं।

3. आलेखीय विधि से निम्न समीकरणों के संगत होने की जाँच कीजिए। यदि संगत हैं, तो आलेखीय विधि से हल कीजिए।

$$2x \quad y \quad 0, \quad x \quad y \quad 0$$

हल समीकरण $2x \quad y \quad 0$ से,

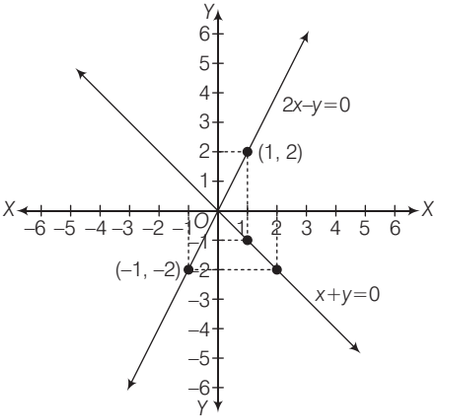
$$y \quad 2x$$

x	0	1	1
y	0	2	2

समीकरण $x \quad y \quad 0$ से,

$$y \quad x$$

x	0	1	2
y	0	1	2



ग्राफ से स्पष्ट है कि दोनों समीकरणों के वक्र $x \quad 0, y \quad 0$ पर प्रतिच्छेद करते हैं।

अत: $x \quad 0, y \quad 0$ समीकरणों के हल हैं।

4. आलेखीय विधि से रैखिक समीकरणों के युग्म $x \quad y \quad 1$ तथा $2x \quad y \quad 10 \quad 0$ का हल ज्ञात कीजिए। इन रेखाओं तथा X-अक्ष के द्वारा बने त्रिभुज के शीर्षों को भी ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $x \quad y \quad 1 \qquad \ldots(i)$

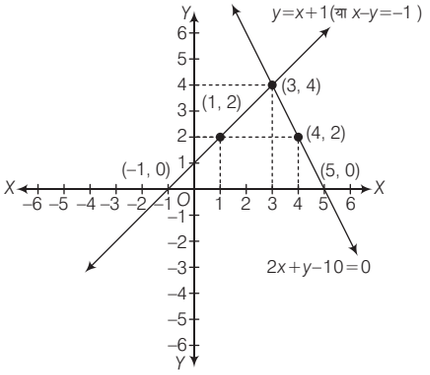
तथा $2x \quad y \quad 10 \quad 0 \qquad \ldots(ii)$

समी (i) से, $y \quad x \quad 1$

x	1	3	0
y	2	4	1

समी (ii) से, $y \quad 2x \quad 10$

x	3	4
y	4	2



ग्राफ से, समीकरणों के युग्म का हल $x \quad 3, y \quad 4$ [$\because$ दोनों रेखाएँ बिन्दु (3, 4) पर काटती हैं]

अब, X-अक्ष तथा रेखाओं से बने त्रिभुज के शीर्ष (3, 4) ,(1, 0) तथा (5, 0) हैं।

5. आलेखीय विधि से रैखिक समीकरणों के युग्म $3x \quad y \quad 11 \quad 0$, $x \quad y \quad 1 \quad 0$ को हल कीजिए। इन रेखाओं तथा Y-अक्ष के द्वारा बने त्रिभुज के शीर्षों को भी ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, समीकरणों का युग्म

$$3x \quad y \quad 11 \quad 0 \qquad \ldots(i)$$

तथा $$x \quad y \quad 1 \quad 0 \qquad \ldots(ii)$$

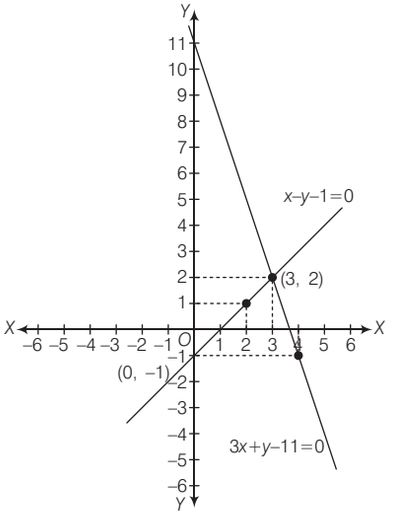
समी (i) से, $y \quad 3x \quad 11$

x	3	4	0
y	2	1	11

समी (ii) से,

$y \quad x \quad 1$

x	3	2
y	2	1



ग्राफ से दोनों रेखाएँ बिन्दु (3, 2) पर काटती हैं।

अत: समीकरण युग्म का हल $x \quad 3, y \quad 2$ है।

Y-अक्ष तथा रेखाओं से बने त्रिभुज के शीर्ष (3, 2), (0, 1) (0, 11) हैं।

6. आलेखीय विधि से निम्न रैखिक समीकरणों के युग्म को हल कीजिए। इन रेखाओं तथा Y-अक्ष के द्वारा बने त्रिभुज के शीर्षों को भी ज्ञात कीजिए।

$$x \quad y \quad 1 \quad 0, \quad 3x \quad 2y \quad 12 \quad 0$$

हल दिया है, समीकरण युग्म

$$x \quad y \quad 1 \quad 0 \qquad \ldots(i)$$

तथा $$3x \quad 2y \quad 12 \quad 0 \qquad \ldots(ii)$$

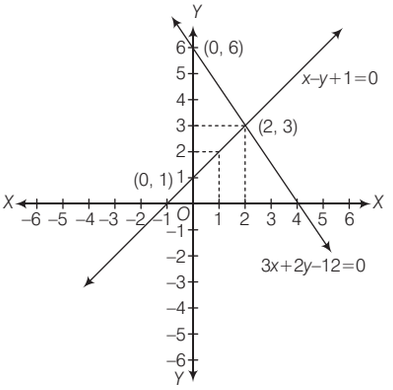
समी (i) से, $y \quad x \quad 1$

x	1	0	2
y	2	1	3

समी (ii) से,

$$y \quad \frac{3x \quad 12}{2}$$

x	2	0
y	3	6



ग्राफ से, दोनों रेखाएँ बिन्दु (2, 3) पर काटती हैं।

अत: समीकरण युग्म का हल $x \quad 2, y \quad 3$ है।

Y-अक्ष तथा इन रेखाओं से बनें त्रिभुज के शीर्ष (0, 6) (0, 1),(2, 3) हैं।

7. रेखाएँ $7x \quad 5y \quad 3$ तथा $21x \quad 15y \quad 5$ दो सीधे रास्तों को निरूपित करती हैं। जाँच कीजिए कि ये रास्ते एक-दूसरे को पार (प्रतिच्छेद) करेंगे या नहीं?

हल दिया है, समीकरण युग्म

$$7x \quad 5y \quad 3 \qquad \ldots(i)$$

तथा $$21x \quad 15y \quad 5 \qquad \ldots(ii)$$

समी (i) से, $y \quad \frac{7x \quad 3}{5}$

x	0	1	1
y	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	2

या

x	0	5	5
y	3	4	10

समी (ii) से, $y = \frac{21x - 5}{15}$

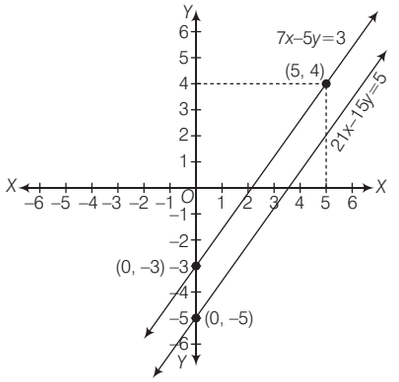
x	0	1
y	$-\frac{1}{3}$	$\frac{16}{15}$

या

x	0	15
y	5	16

[पैमाना संख्या 15]

यहाँ, y के मान पूर्णांक नहीं हैं इसलिए पैमाना मानकर ग्राफ खींचते हैं।



ग्राफ से स्पष्ट है दोनों रेखाएँ एक-दूसरे के समान्तर हैं। अत: प्रतिच्छेद नहीं करेंगी।

8. रैखिक समीकरणों का एक ऐसा युग्म लिखिए जिसका एक हल $x = 1, y = 3$ अद्वितीय हो। आप ऐसे कितने युग्म लिख सकते हैं?

हल रैखिक समीकरणों का युग्म

$x + y = 2, 3x + 2y = 3$

[इस युग्म का हल $x = 1, y = 3$ है]

ऐसे अनन्त युग्म हो सकते हैं, जिनके हल $x = 1, y = 3$ हो।

9. अनुपात $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$ तथा $\frac{c_1}{c_2}$ की तुलना कर ज्ञात कीजिए कि निम्न रैखिक समीकरणों के युग्म संगत हैं या असंगत?

(i) $\frac{4}{3}x + 2y = 8$ तथा $2x + 3y = 12$

(ii) $4x + y = 4$ तथा $3x + 2y = 14$

(iii) $3x + 5y = 11$ तथा $6x + 10y = 7$

हल (i) समीकरणों $\frac{4}{3}x + 2y = 8$ तथा $2x + 3y = 12$

की तुलना $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ से करने पर,

$a_1 = \frac{4}{3}, b_1 = 2, c_1 = -8$

तथा $a_2 = 2, b_2 = 3, c_3 = -12$

अब, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{2}{3}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{3}$

तथा $\frac{c_1}{c_2} = \frac{-8}{-12} = \frac{2}{3}$

$\because \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

अत: निकाय (या समीकरण युग्म) संगत है।

(ii) समीकरणों $4x + y = 4$ तथा $3x + 2y = 14$ की तुलना $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ से करने पर,

$a_1 = 4, b_1 = 1, c_1 = -4$

तथा $a_2 = 3, b_2 = 2, c_2 = -14$

अब, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{4}{3}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{2}$

तथा $\frac{c_1}{c_2} = \frac{-4}{-14} = \frac{2}{7}$

$\because \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

अत: समीकरण युग्म (या निकाय) संगत है।

(iii) समीकरणों $3x + 5y = 11$ तथा $6x + 10y = 7$ की तुलना $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ से करने पर,

$a_1 = 3, b_1 = 5, c_1 = -11$

तथा $a_2 = 6, b_2 = 10, c_2 = -7$

अब, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$,

$\frac{b_1}{b_2} = \frac{-5}{10} = \frac{1}{2}$

तथा $\frac{c_1}{c_2} = \frac{11}{7}$

$\because \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

अत: समीकरण निकाय (या युग्म) असंगत है।

10. अनुपात $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$ तथा $\frac{c_1}{c_2}$ की तुलना कर ज्ञात कीजिए कि निम्न रैखिक समीकरणों के युग्म एक-दूसरे को एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करते हैं या समान्तर हैं या सम्पाती हैं।

(i) $2x + 3y - 3 = 0$ तथा $x - 2y - 2 = 0$

(ii) $4x - 2y - 10 = 0$ तथा $6x - 3y - 12 = 0$

(iii) $3x + 4y - 1 = 0$ तथा $2x + \frac{8}{3}y - 5 = 0$

हल (i) समीकरणों के युग्म $2x + 3y - 3 = 0$ तथा $x - 2y - 2 = 0$ की तुलना $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ से करने पर,

$a_1 = 2, b_1 = -3, c_1 = -3$

तथा $a_2 = 1, b_2 = -2, c_2 = -2$

अब, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{1} = 2,$

$$\frac{b_1}{b_2} \quad \frac{3}{1} \quad \frac{3}{2}$$

तथा $\frac{c_1}{c_2} \quad \frac{3}{2}$

$\because$ $\frac{a_1}{a_2} \quad \frac{b_1}{b_2}$

अत: रेखाएँ प्रतिच्छेदी होंगी।

(ii) समीकरणों के युग्म $4x \quad 2y \quad 10$ तथा $6x \quad 3y \quad 12$ की तुलना $a_1x \quad b_1y \quad c_1$ तथा $a_2x \quad b_2y \quad c_2$ से करने पर,

$$a_1 \quad 4, b_1 \quad 2, c_1 \quad 10$$

तथा $a_2 \quad 6, b_2 \quad 3, c_2 \quad 12$

अब, $\frac{a_1}{a_2} \quad \frac{4}{6} \quad \frac{2}{3}$,

$\frac{b_1}{b_2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{2}{3}$

तथा $\frac{c_1}{c_2} \quad \frac{10}{12} \quad \frac{5}{6}$

$\because$ $\frac{a_1}{a_2} \quad \frac{b_1}{b_2} \quad \frac{c_1}{c_2}$

अत: समीकरण युग्म समान्तर रेखाएँ निरूपित करेगा।

(iii) समीकरणों के युग्म $3x \quad 4y \quad 1 \quad 0$ तथा $2x \quad \frac{8}{3}y \quad 5 \quad 0$

की तुलना $a_1x \quad b_1y \quad c_1 \quad 0$

तथा $a_2x \quad b_2y \quad c_2 \quad 0$ से करने पर,

$$a_1 \quad 3, b_1 \quad 4, c_1 \quad 1$$

तथा $a_2 \quad 2, b_2 \quad \frac{8}{3}, c_2 \quad 5$

अब, $\frac{a_1}{a_2} \quad \frac{3}{2}$,

$\frac{b_1}{b_2} \quad \frac{4}{\frac{8}{3}} \quad \frac{3}{2}$

तथा $\frac{c_1}{c_2} \quad \frac{1}{5}$

$\because$ $\frac{a_1}{a_2} \quad \frac{b_1}{b_2} \quad \frac{c_1}{c_2}$

अत: समीकरण युग्म समान्तर रेखाएँ निरूपित करेगा।

11. k के किस मान के लिए रैखिक समीकरणों के निकाय का अद्वितीय हल होगा?

(i) $kx \quad 2y \quad 5, 3x \quad y \quad 1$

(ii) $x \quad 3y \quad 5, 5x \quad ky \quad 10$

(iii) $kx \quad 2y \quad 4, 8x \quad ky \quad 11$

हल (i) दिया है, समीकरण निकाय

$$kx \quad 2y \quad 5 \qquad \ldots(i)$$

तथा $3x \quad y \quad 1 \qquad \ldots(ii)$

की तुलना $a_1x \quad b_1y \quad c_1$

तथा $a_2x \quad b_2y \quad c_2$

से करने पर,

$$a_1 \quad k, b_1 \quad 2, c_1 \quad 5$$

तथा $a_2 \quad 3, b_2 \quad 1, c_2 \quad 1$

प्रश्नानुसार, समीकरण निकाय का एक अद्वितीय हल है

$\frac{a_1}{a_2} \quad \frac{b_1}{b_2}$

$\frac{k}{3} \quad \frac{2}{1}$ [मान रखने पर]

$k \quad 6$

(ii) दिया है, समीकरण निकाय

$$x \quad 3y \quad 5 \qquad \ldots(i)$$

$$5x \quad ky \quad 10 \qquad \ldots(ii)$$

की तुलना $a_1x \quad b_1y \quad c_1$ तथा $a_2x \quad b_2y \quad c_2$ से करने पर,

$$a_1 \quad 1, \ b_1 \quad 3, c_1 \quad 5$$

तथा $a_2 \quad 5, b_2 \quad k, c_2 \quad 10$

प्रश्नानुसार, समीकरण निकाय का एक अद्वितीय हल है।

$\frac{a_1}{a_2} \quad \frac{b_1}{b_2}$

$\frac{1}{5} \quad \frac{3}{k}$

$k \quad 15$

(iii) दिया है, समीकरण निकाय

$$kx \quad 2y \quad 4 \qquad \ldots(i)$$

$$8x \quad ky \quad 11 \qquad \ldots(ii)$$

की तुलना $a_1x \quad b_1y \quad c_1$ तथा $a_2x \quad b_2y \quad c_2$ से करने पर,

$$a_1 \quad k, b_1 \quad 2, c_1 \quad 4$$

तथा $a_2 \quad 8, b_2 \quad k, c_2 \quad 11$

प्रश्नानुसार, समीकरण निकाय का एक अद्वितीय हल है।

$\frac{a_1}{a_2} \quad \frac{b_1}{b_2}$

$\frac{k}{8} \quad \frac{2}{k}$

$k^2 \quad 16$

$k \quad 4$ [वर्गमूल लेने पर]

12. k के किस मान के लिए निम्न रैखिक समीकरणों के निकाय का कोई हल नहीं होगा?

(i) $4x \quad 5y \quad 17, kx \quad 15y \quad 33$

(ii) $kx \quad 2y \quad 5, 8x \quad ky \quad 20$

(iii) $3x \quad y \quad 1(2k \quad 1)x \quad (k \quad 1)y \quad (2k \quad 1)$

हल (i) समीकरण निकाय $4x \quad 5y \quad 17, kx \quad 15y \quad 33$ की तुलना $a_1x \quad b_1y \quad c_1, a_2x \quad b_2y \quad c_2$ से करने पर,

$$a_1 \quad 4, b_1 \quad 5, c_1 \quad 17$$

तथा $a_2 \quad k, b_2 \quad 15, c_2 \quad 33$

प्रश्नानुसार, समीकरण निकाय का कोई हल नहीं है

$$\frac{a_1}{a_2} \quad \frac{b_1}{b_2} \quad \frac{c_1}{c_2}$$

$$\frac{4}{k} \quad \frac{5}{15} \quad \frac{17}{33}$$

I और II अनुपात से, $\frac{4}{k} \quad \frac{5}{15}$

$$k \quad 12$$

(ii) समीकरण निकाय $kx \quad 2y \quad 5, 8x \quad ky \quad 20$ की तुलना

$a_1x \quad b_1y \quad c_1, a_2x \quad b_2y \quad c_2$

से करने पर,

$$a_1 \quad k, b_1 \quad 2, c_1 \quad 5$$

तथा $a_2 \quad 8, b_2 \quad k, c_2 \quad 20$

प्रश्नानुसार, समीकरण निकाय का कोई हल नहीं है

$$\frac{a_1}{a_2} \quad \frac{b_1}{b_2} \quad \frac{c_1}{c_2}$$

$$\frac{k}{8} \quad \frac{2}{k} \quad \frac{5}{20}$$

I और II अनुपात से, $\frac{k}{8} \quad \frac{2}{k}$

$$k^2 \quad 16$$

$$k \quad 4$$

(iii) समीकरण निकाय $3x \quad y \quad 1$, $(2k \quad 1)x \quad (k \quad 1)y \quad (2k \quad 1)$ की तुलना $a_1x \quad b_1y \quad c_1$, $a_2x \quad b_2y \quad c_2$ से करने पर,

$$a_1 \quad 3, b_1 \quad 1, c_1 \quad 1$$

तथा $a_2 \quad 2k \quad 1, b_2 \quad k \quad 1, c_2 \quad 2k \quad 1$

प्रश्नानुसार, समीकरण निकाय का कोई हल नहीं है

$$\frac{a_1}{a_2} \quad \frac{b_1}{b_2} \quad \frac{c_1}{c_2}$$

$$\frac{3}{2k \quad 1} \quad \frac{1}{k \quad 1} \quad \frac{1}{2k \quad 1}$$

I और II अनुपात से,

$$\frac{3}{2k \quad 1} \quad \frac{1}{k \quad 1}$$

$$3k \quad 3 \quad 2k \quad 1$$

$$3k \quad 2k \quad 1 \quad 3$$

$$k \quad 2$$

13. k के किस मान के लिए निम्न रैखिक समीकरणों के निकाय के अनन्त हल होंगे?

(i) $4x \quad 7y \quad 10; (k \quad 2)x \quad 21y \quad 3k$

(ii) $2x \quad (k \quad 2)y \quad k; 6x \quad (2k \quad 1)y \quad 2k \quad 5$

(iii) $2x \quad 3y \quad 2; (k \quad 2)x \quad (2k \quad 1)y \quad 2(k \quad 1)$

हल (i) समीकरण निकाय $4x \quad 7y \quad 10$ तथा $(k \quad 2)x \quad 21y \quad 3k$ की तुलना

$a_1x \quad b_1y \quad c_1$ तथा $a_2x \quad b_2y \quad c_2$ से करने पर,

$$a_1 \quad 4, b_1 \quad 7, c_1 \quad 10$$

तथा $a_2 \quad k \quad 2, b_2 \quad 21, c_2 \quad 3k$

प्रश्नानुसार, समीकरण निकाय के अनन्त हल हैं

$$\frac{a_1}{a_2} \quad \frac{b_1}{b_2} \quad \frac{c_1}{c_2}$$

$$\frac{4}{k \quad 2} \quad \frac{7}{21} \quad \frac{10}{3k}$$

I और II अनुपात से, $7k \quad 14 \quad 84$

$$7k \quad 70$$

$$k \quad 10$$

या II और III अनुपात से,

$$21k \quad 210$$

$$k \quad \frac{210}{21}$$

$$k \quad 10$$

(ii) समीकरण निकाय $2x \quad (k \quad 2)y \quad k$ तथा $6x \quad (2k \quad 1)y \quad 2k \quad 5$ की तुलना

$a_1x \quad b_1y \quad c_1$, तथा $a_2x \quad b_2y \quad c_2$ से करने पर,

$$a_1 \quad 2, b_1 \quad k \quad 2, c_1 \quad k$$

तथा $a_2 \quad 6, b_2 \quad 2k \quad 1, c_2 \quad 2k \quad 5$

प्रश्नानुसार, समीकरण निकाय के अनन्त हल हैं

$$\frac{a_1}{a_2} \quad \frac{b_1}{b_2} \quad \frac{c_1}{c_2}$$

$$\frac{2}{6} \quad \frac{k \quad 2}{2k \quad 1} \quad \frac{k}{2k \quad 5}$$

I और II अनुपात से, $\frac{2}{6} \quad \frac{k \quad 2}{2k \quad 1}$

$$6k \quad 12 \quad 4k \quad 2$$

$$6k \quad 4k \quad 2 \quad 12$$

$$2k \quad 10$$

$$k \quad \frac{10}{2} \quad 5$$

(iii) समीकरण निकाय $2x \quad 3y \quad 2$ तथा $(k \quad 2)x \quad (2k \quad 1)y \quad 2(k \quad 1)$ की तुलना $a_1x \quad b_1y \quad c_1$, तथा $a_2x \quad b_2y \quad c_2$ से करने पर,

$$a_1 \quad 2, b_1 \quad 3, c_1 \quad 2$$

तथा $a_2 \quad k \quad 2, b_2 \quad 2k \quad 1,$

$c_2 \quad 2(k \quad 1)$

प्रश्नानुसार, समीकरण निकाय के अनन्त हल हैं

$$\frac{a_1}{a_2} \quad \frac{b_1}{b_2} \quad \frac{c_1}{c_2}$$

$$\frac{2}{k \quad 2} \quad \frac{3}{2k \quad 1} \quad \frac{2}{2(k \quad 1)}$$

II और III अनुपात से,

$$\frac{3}{2k\ \ 1}\quad\frac{2}{2(k\ \ 1)}$$

$$4k\ \ 2\quad 6k\ \ 6$$

$$4k\ \ 6k\quad 6\ \ 2$$

$$2k\quad 8$$

$$k\quad 4$$

14. p तथा q के किस मान के लिए निम्न रैखिक समीकरण निकाय के अनन्त हल होंगे?

(i) $(2p\ \ 1)x\ \ 3y\ \ 5;\ 3x\ \ (q\ \ 1)y\ \ 2$

(ii) $2x\ \ 3y\ \ 7;$

$(p\ \ q\ \ 1)x\ \ (p\ \ 2q\ \ 2)y\ \ 4(p\ \ q)\ \ 1$

हल (i) समीकरण निकाय $(2p\ \ 1)x\ \ 3y\ \ 5$

तथा $3x\ \ (q\ \ 1)y\ \ 2$ की तुलना

$a_1x\ \ b_1y\ \ c_1$ तथा $a_2x\ \ b_2y\ \ c_2$ से करने पर,

$$a_1\ \ 2p\ \ 1,\ b_1\ \ 3,c_1\ \ 5$$

तथा $\quad a_2\ \ 3,b_2\ \ q\ \ 1,c_2\ \ 2$

प्रश्नानुसार, समीकरण निकाय के अनन्त हल हैं

$$\frac{a_1}{a_2}\quad\frac{b_1}{b_2}\quad\frac{c_1}{c_2}$$

$$\frac{2p\ \ 1}{3}\quad\frac{3}{q\ \ 1}\quad\frac{5}{2}$$

I और III अनुपात से,

$$\frac{2p\ \ 1}{3}\quad\frac{5}{2}$$

$$4p\ \ 2\quad 15$$

$$4p\ \ 15\quad 2$$

$$4p\quad 17$$

$$p\quad\frac{17}{4}$$

अब, II और III अनुपात से,

$$\frac{3}{q\ \ 1}\quad\frac{5}{2}$$

$$5q\ \ 5\quad 6$$

$$5q\ \ 6\quad 5$$

$$5q\quad 11$$

$$q\quad\frac{11}{5}$$

(ii) समीकरण निकाय $2x\ \ 3y\ \ 7$

तथा $(p\ \ q\ \ 1)x\ \ (p\ \ 2q\ \ 2)y\ \ 4(p\ \ q)\ \ 1$

की तुलना $a_1x\ \ b_1y\ \ c_1$ तथा $a_2x\ \ b_2y\ \ c_2$ से करने पर,

$$a_1\ \ 2,b_1\ \ 3,c_1\ \ 7$$

तथा $\quad a_2\ \ p\ \ q\ \ 1,$

$$b_2\ \ p\ \ 2q\ \ 2,$$

$$c_2\ \ 4(p\ \ q)\ \ 1$$

प्रश्नानुसार, समीकरण निकाय के अनन्त हल हैं।

$$\frac{a_1}{a_2}\quad\frac{b_1}{b_2}\quad\frac{c_1}{c_2}$$

$$\frac{2}{p\ \ q\ \ 1}\quad\frac{3}{p\ \ 2q\ \ 2}\quad\frac{7}{4(p\ \ q)\ \ 1}$$

I और II अनुपात से,

$$\frac{2}{p\ \ q\ \ 1}\quad\frac{3}{p\ \ 2q\ \ 2}$$

$$3p\ \ 3q\ \ 3\quad 2p\ \ 4q\ \ 4$$

$$3p\ \ 3q\ \ 2p\ \ 4q\ \ 4\ \ 3$$

$$p\ \ q\ \ 1 \qquad \ldots(i)$$

अब, II और III अनुपात से,

$$\frac{3}{p\ \ 2q\ \ 2}\quad\frac{7}{4(p\ \ q)\ \ 1}$$

$$12p\ \ 12q\ \ 3\quad 7q\ \ 14q\ \ 14$$

$$12p\ \ 12q\ \ 7p\ \ 14q\ \ 14\ \ 3$$

$$5p\ \ 2q\ \ 11 \qquad \ldots(ii)$$

समी (i) को 2 से गुणा करके समी (ii) में से घटाने पर,

$$3p\ \ 9\qquad p\ \ 3$$

p का मान समी (i) में रखने पर,

$$3\ \ q\ \ 1$$

$$q\ \ 3\ \ 1\ \ 2$$

15. k के किस मान के लिए रैखिक समीकरणों के निकाय $kx\ \ 3y\ \ 3$ तथा $12x\ \ ky\ \ 6$ समान्तर रेखाओं को निरूपित करेगा?

हल समीकरण निकाय $kx\ \ 3y\ \ 3$ तथा $12x\ \ ky\ \ 6$ की तुलना $a_1x\ \ b_1y\ \ c_1$, तथा $a_2x\ \ b_2y\ \ c_2$ से करने पर,

$$a_1\ \ k,b_1\ \ 3,c_1\ \ 3$$

तथा $\quad a_2\ \ 12,\ b_2\ \ k\ c_2\ \ 6$

प्रश्नानुसार, समीकरण निकाय समान्तर रेखाओं को निरूपित करता है।

$$\frac{a_1}{a_2}\quad\frac{b_1}{b_2}\quad\frac{c_1}{c_2}\qquad\frac{k}{12}\quad\frac{3}{k}\quad\frac{3}{6}$$

I और III अनुपात से, $\dfrac{k}{12}\quad\dfrac{3}{k}$

$$k^2\quad 36$$

$$k\quad 6 \qquad \text{[वर्गमूल लेने पर]}$$

16. k का मान ज्ञात करें, जब रैखिक समीकरणों के निकाय $x\ \ 2y\ \ 3,\ 5x\ \ ky\ \ 7\ \ 0$ निरूपित करता है

(i) प्रतिच्छेदी रेखाओं को

(ii) समान्तर रेखाओं को

क्या k के किसी मान के लिए दिए गए समीकरणों के निकाय सम्पाती रेखाओं को निरूपित करते हैं?

हल समीकरण निकाय $x\ \ 2y\ \ 3$ तथा $5x\ \ ky\ \ 7\ \ 0$ की तुलना

$a_1x\ \ b_1y\ \ c_1$ तथा $a_2x\ \ b_2y\ \ c_2$

से करने पर,

$$a_1\ \ 1,b_1\ \ 2,c_1\ \ 3$$

तथा $\quad a_2\ \ 5,b_2\ \ k,c_2\ \ 7$

(i) प्रश्नानुसार, रेखाएँ प्रतिच्छेदी हैं।

$$\frac{a_1}{a_2} \quad \frac{b_1}{b_2}$$

$$\frac{1}{5} \quad \frac{2}{k}$$

$$k \quad 10$$

(ii) प्रश्नानुसार, रेखाएँ समान्तर हैं।

$$\frac{a_1}{a_2} \quad \frac{b_1}{b_2} \quad \frac{c_1}{c_2}$$

$$\frac{1}{5} \quad \frac{2}{k} \quad \frac{3}{7}$$

I और II अनुपात से, $\frac{1}{5} \quad \frac{2}{k}$

$$k \quad 10$$

नहीं, रेखाएँ k के किसी मान के लिए सम्पाती नहीं हैं।

निर्देश (प्र. सं. 19-22) ***निम्नलिखित प्रश्नों को आलेखीय विधि से हल कीजिए।***

17. 4 कुर्सियों तथा 3 मेज का मूल्य ₹ 210 है तथा 5 कुर्सियों तथा 2 मेज का मूल्य ₹ 175 है। एक कुर्सी तथा एक मेज का मूल्य आलेखीय विधि से ज्ञात कीजिए।

हल माना 1 कुर्सी का मूल्य ₹ x

तथा 1 मेज का मूल्य ₹ y

प्रथम प्रतिबन्ध से, $4x \quad 3y \quad 210$ ...(i)

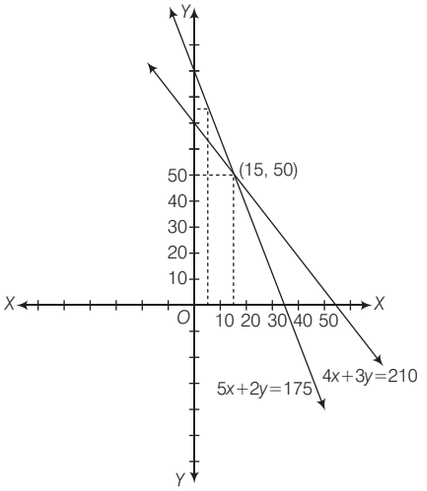
द्वितीय प्रतिबन्ध से, $5x \quad 2y \quad 175$ ...(ii)

समी (i) से, $y \quad \frac{210 \quad 4x}{3}$

x	0	15
y	70	50

समी (ii) से, $y \quad \frac{175 \quad 5x}{2}$

x	15	5
y	50	75



ग्राफ से स्पष्ट होता है कि दोनों समीकरणों की रेखाएँ बिन्दु (15, 50) पर काटती हैं।

अर्थात् $x \quad 15, y \quad 50$

अत: एक कुर्सी का मूल्य ₹ 15 तथा एक मेज का मूल्य ₹ 50 है।

18. 4 पेन और 4 पेंसिल बॉक्सों का मूल्य ₹ 100 है। यदि एक पेन के मूल्य का तीन गुना एक पेंसिल बॉक्स के मूल्य से ₹ 15 अधिक है। उपरोक्त स्थिति के लिए, रैखिक समीकरणों का एक युग्म बनाइए तथा उन्हें आलेखीय विधि से हल करके एक पेन और एक पेंसिल बॉक्स का मूल्य भी ज्ञात कीजिए।

हल माना एक पेन का मूल्य ₹ x

तथा 1 पेंसिल बॉक्स का मूल्य ₹ y

प्रथम प्रतिबन्ध से, $4x \quad 4y \quad 100$ ...(i)

द्वितीय प्रतिबन्ध से, $3x \quad y \quad 15$

या $3x \quad y \quad 15$ ...(ii)

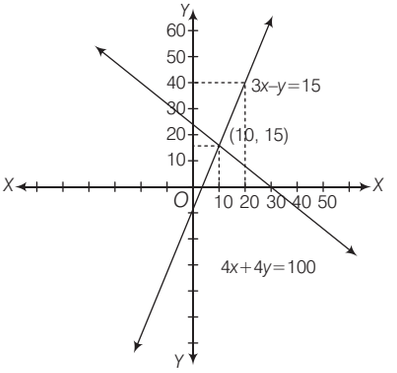
समी (i) से, $y \quad \frac{100 \quad 4x}{4}$

$y \quad 25 \quad x$

x	10	0	5
y	15	25	20

समी (ii) से, $y \quad 3x \quad 15$

x	10	15
y	15	30



ग्राफ से स्पष्ट है कि दोनों समीकरणों की रेखाएँ बिन्दु (10, 15) पर काटती हैं।

इसलिए समीकरणों का हल $x \quad 10, y \quad 15$ है।

अत: 1 पेन का मूल्य ₹ 10 तथा 1 पेंसिल बॉक्स का मूल्य ₹ 15 है।

19. दो वर्ष पहले, सलीम की आयु अपनी पुत्री की आयु की तीन गुनी थी तथा छः वर्ष बाद उसकी आयु पुत्री की आयु के दोगुने से 4 वर्ष अधिक होगी। उसकी वर्तमान आयु क्या है?

हल माना सलीम की वर्तमान आयु x वर्ष

तथा उसकी पुत्री की वर्तमान आयु y वर्ष

प्रथम प्रतिबन्ध से, $x \quad 2 \quad 3(y \quad 2)$

$x \quad 3y \quad 6 \quad 2$

$x \quad 3y \quad 4$ ...(i)

द्वितीय प्रतिबन्ध से, $x \quad 6 \quad 2(y \quad 6) \quad 4$

$$x \quad 2y \quad 12 \quad 4 \quad 6$$

$$x \quad 2y \quad 10 \qquad \ldots(ii)$$

समी (i) से, $\quad y \quad \frac{x \quad 4}{3}$

x	2	38
y	2	14

समी (ii) से, $\quad y \quad \frac{x \quad 10}{2}$

x	38	18
y	14	4

आलेख (ग्राफ) विद्यार्थी स्वयं बनाएँ।

दोनों तालिकाओं में $x \quad 38, y \quad 14$ समान मान हैं, इसलिए समीकरणों का हल $x \quad 38, y \quad 14$ है।

अत: सलीम की आयु 38 वर्ष तथा सलीम की पुत्री की आयु 14 वर्ष है।

20. दो संख्याएँ 5 : 6 के अनुपात में हैं। यदि प्रत्येक संख्या में से 8 घटा दिया जाए, तो यह अनुपात 4 : 5 हो जाता है। ये संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल माना दो संख्याएँ x तथा y हैं।

प्रथम प्रतिबन्ध से, $\quad \frac{x}{y} \quad \frac{5}{6}$

$$6x \quad 5y$$

$$6x \quad 5y \quad 0 \qquad \ldots(i)$$

द्वितीय प्रतिबन्ध से, $\quad \frac{x \quad 8}{y \quad 8} \quad \frac{4}{5}$

$$5x \quad 40 \quad 4y \quad 32$$

$$5x \quad 4y \quad 32 \quad 40$$

$$5x \quad 4y \quad 8 \qquad \ldots(ii)$$

समी (i) से, $\quad y \quad \frac{6x}{5}$

x	5	40
y	6	48

समी (ii) से, $\quad y \quad \frac{5x \quad 8}{4}$

x	40	4
y	48	3

विद्यार्थी ग्राफ स्वयं बनाएँ।

दोनों तालिकाओं में $x \quad 40, y \quad 48$ समान हैं, इसलिए यह समीकरणों का हल है। अत: अभीष्ट संख्याएँ 40 तथा 48 हैं।

प्रश्नावली 3.2

1. निम्न समीकरणों के निकाय को प्रतिस्थापन विधि से हल कीजिए। यदि सम्भव है।

(i) $x \quad y \quad 8, 2x \quad 3y \quad 1$

(ii) $3x \quad 2y \quad 10, 12x \quad 8y \quad 30$

(iii) $2x \quad 7y \quad 11, 6x \quad 21y \quad 33$

(iv) $\sqrt{2}x \quad \sqrt{5}y \quad 0, \sqrt{6}x \quad \sqrt{15}y \quad 0$

हल (i) दी गई समीकरण

$$x \quad y \quad 8 \qquad \ldots(i)$$

तथा $\quad 2x \quad 3y \quad 1 \qquad \ldots(ii)$

समी (i) व (ii) की तुलना $a_1x \quad b_1y \quad c_1$ तथा $a_2x \quad b_2y \quad c_2$ से करने पर,

$$a_1 \quad 1, b_1 \quad 1, c_1 \quad 8$$

तथा $\quad a_2 \quad 2, b_2 \quad 3, c_2 \quad 1$

अब, $\quad \frac{a_1}{a_2} \quad \frac{1}{2}, \frac{b_1}{b_2} \quad \frac{1}{3}$

तथा $\quad \frac{c_1}{c_2} \quad \frac{8}{1}$

$\because \quad \frac{a_1}{a_2} \quad \frac{b_1}{b_2}$

हल सम्भव है।

समी (i) से $y \quad 8 \quad x$, समी (ii) में प्रतिस्थापित करने पर,

$$2x \quad 3(8 \quad x) \quad 1$$

$$2x \quad 24 \quad 3x \quad 1$$

$$5x \quad 25$$

$$x \quad \frac{25}{5} \quad 5$$

तथा $\quad y \quad 8 \quad 5 \quad 3$

अत: $x \quad 5, y \quad 3$ समीकरण निकाय का हल है।

(ii) दी गई समीकरण

$$3x \quad 2y \quad 10 \qquad \ldots(i)$$

तथा $\quad 12x \quad 8y \quad 30 \qquad \ldots(ii)$

की तुलना $a_1x \quad b_1y \quad c_1$ तथा $a_2x \quad b_2y \quad c_2$ से करने पर,

$$a_1 \quad 3, b_1 \quad 2, c_1 \quad 10$$

तथा $\quad a_2 \quad 12, b_2 \quad 8, c_2 \quad 30$

अब, $\quad \frac{a_1}{a_2} \quad \frac{3}{12} \quad \frac{1}{4},$

$$\frac{b_1}{b_2} \quad \frac{2}{8} \quad \frac{1}{4}$$

तथा $\quad \frac{c_1}{c_2} \quad \frac{10}{30} \quad \frac{1}{3}$

$\because \quad \frac{a_1}{a_2} \quad \frac{b_1}{b_2} \quad \frac{c_1}{c_2}$

अत: दी गई समीकरण का कोई हल अस्तित्व में नहीं है।

(iii) दी गई समीकरण

$$2x \quad 7y \quad 11 \qquad \ldots(i)$$

तथा $\quad 6x \quad 21y \quad 33 \qquad \ldots(ii)$

की तुलना $a_1x \quad b_1y \quad c_1$ तथा $a_2x \quad b_2y \quad c_2$ से करने पर,

$$a_1 \quad 2, b_1 \quad 7, c_1 \quad 11$$

तथा $a_2 \quad 6, b_2 \quad 21, c_2 \quad 33$

अब, $\frac{a_1}{a_2} \quad \frac{2}{6} \quad \frac{1}{3}, \frac{b_1}{b_2} \quad \frac{7}{21} \quad \frac{1}{3}$

तथा $\frac{c_1}{c_2} \quad \frac{11}{33} \quad \frac{1}{3}$

$\because \quad \frac{a_1}{a_2} \quad \frac{b_1}{b_2} \quad \frac{c_1}{c_2}$

अत: दी गई समीकरण निकाय के अनन्त हल होंगे।

(iv) दी गई समीकरण $\sqrt{2}x \quad \sqrt{5}y \quad 0, \sqrt{6}x \quad \sqrt{15}y \quad 0$ की तुलना $a_1x \quad b_1y \quad c_1$ तथा $a_2x \quad b_2y \quad c_2$ से करने पर,

$a_1 \quad \sqrt{2}, b_1 \quad \sqrt{5}, c_1 \quad 0$

तथा $a_2 \quad \sqrt{6}, b_2 \quad \sqrt{15}, c_2 \quad 0$

अब, $\frac{a_1}{a_2} \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{b_1}{b_2} \quad \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{15}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}}$

तथा $\frac{c_1}{c_2}$ अस्तित्व में नहीं है।

अत: समीकरण निकाय के अनन्त हल होंगे।

2. निम्न रैखिक समीकरणों के युग्म को प्रतिस्थापन विधि से हल कीजिए।

(i) $x \quad y \quad 2, 3x \quad 2y \quad 16$

(ii) $7x \quad 4y \quad 3, x \quad 2y \quad 3$

(iii) $3x \quad 7y \quad 37, 5x \quad 6y \quad 39$

(iv) $3x \quad \frac{y \quad 7}{11} \quad 8, 2y \quad \frac{x \quad 11}{7} \quad 10$

(v) $1.1x \quad 1.5y \quad 2.3 \quad 0, 0.7x \quad 0.2y \quad 2$

(vi) $\sqrt{7}x \quad \sqrt{11}y \quad 0, \sqrt{3}x \quad \sqrt{5}y \quad 0$

हल (i) दी गई समीकरण, $x \quad y \quad 2$ ...(i)

तथा $3x \quad 2y \quad 16$ ...(ii)

समी (i) से $y \quad x \quad 2$, समी (ii) में प्रतिस्थापित करने पर,

$3x \quad 2(x \quad 2) \quad 16$

$3x \quad 2x \quad 4 \quad 16$

$5x \quad 16 \quad 4$

$5x \quad 20$

$x \quad \frac{20}{5} \quad 4$

तथा $y \quad 4 \quad 2 \quad 2$

अत: $x \quad 4, y \quad 2$ समीकरण युग्म का हल है।

(ii) दी गई समीकरण

$7x \quad 4y \quad 3$ ...(i)

तथा $x \quad 2y \quad 3$ ...(ii)

समी (ii) से $x \quad 3 \quad 2y$, समी (i) में प्रतिस्थापित करने पर,

$7(3 \quad 2y) \quad 4y \quad 3$

$21 \quad 14y \quad 4y \quad 3$

$18y \quad 3 \quad 21$

$18y \quad 18$

$y \quad 1$

तथा $x \quad 3 \quad 2(1) \quad 1$

अत: $x \quad 1, y \quad 1$ समीकरण युग्म का हल है।

(iii) दी गई समीकरण

$3x \quad 7y \quad 37$ ...(i)

तथा $5x \quad 6y \quad 39$ ...(ii)

समी (i) से $x \quad \frac{37 \quad 7y}{3}$, समी (ii) में प्रतिस्थापित करने पर,

$5 \quad \frac{37 \quad 7y}{3} \quad 6y \quad 39$

$5(37 \quad 7y) \quad 18y \quad 117$

$185 \quad 35y \quad 18y \quad 117$

$17y \quad 117 \quad 185$

$17y \quad 68$

$y \quad \frac{68}{17} \quad 4$

तथा $x \quad \frac{37 \quad 7(4)}{3}$

$\frac{37 \quad 28}{3} \quad \frac{9}{3} \quad 3$

अत: $x \quad 3, y \quad 4$ समीकरण युग्म का हल है।

(iv) दी गई समीकरण $3x \quad \frac{y \quad 7}{11} \quad 8$ ...(i)

तथा $2y \quad \frac{x \quad 11}{7} \quad 10$ ...(ii)

समीकरणों को सरल करके लिखने पर,

$33x \quad y \quad 7 \quad 88$

$33x \quad y \quad 95$ ...(iii)

तथा $14y \quad x \quad 11 \quad 70$

$x \quad 14y \quad 59$ ...(iv)

समी (iii) से $y \quad 33x \quad 95$, समी (iv) में प्रतिस्थापित करने पर,

$x \quad 14(33x \quad 95) \quad 59$

$x \quad 462x \quad 1330 \quad 59$

$463x \quad 59 \quad 1330$

$463x \quad 1389$

$x \quad \frac{1389}{463} \quad 3$

तथा $y \quad 33(3) \quad 95$

$y \quad 99 \quad 95 \quad 4$

अत: $x \quad 3$ तथा $y \quad 4$ समीकरण युग्म का हल है।

(v) दी गई समीकरण

$1.1x \quad 1.5y \quad 2.3 \quad 0$ ...(i)

तथा $0.7x \quad 0.2y \quad 2$ ...(ii)

समी (ii) से $x \quad \frac{2 \quad 0.2y}{0.7}$, समी (i) में प्रतिस्थापित करने पर,

$$1.1 \quad \frac{2 + 0.2y}{0.7} \quad 1.5y \quad 2.3 = 0$$

$$2.2 + 0.22y \quad 1.05y \quad 1.61 = 0$$

$$1.27y \quad 3.81 = 0$$

$$y \quad \frac{3.81}{1.27} \quad 3$$

तथा $x \quad \frac{2 \quad 0.2(\quad 3)}{0.7}$

$$\frac{2 \quad 0.6}{0.7} \quad \frac{1.4}{0.7} \quad 2$$

अत: $x \quad 2, y \quad 3$ समीकरण युग्म का हल है।

(vi) दी गई समीकरण

$$\sqrt{7}x \quad \sqrt{11}y \quad 0 \quad ...(i)$$

तथा $\sqrt{3}x \quad \sqrt{5}y \quad 0$ ...(ii)

समी (i) से, $x \quad \frac{\sqrt{11}y}{\sqrt{7}}$, समी (ii) में प्रतिस्थापित करने पर,

$$\sqrt{3} \quad \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{7}} \; y \quad \sqrt{5}y \quad 0$$

$$\frac{\sqrt{33}}{\sqrt{7}} \quad \sqrt{5} \quad y \quad 0$$

$$y \quad 0 \text{ तथा } x \quad 0$$

अत: $x \quad 0, y \quad 0$ समीकरण युग्म का हल है।

3. (i) समीकरण $2x \quad 3y \quad 13$ तथा $7x \quad 2y \quad 20$ को हल कीजिए और $y \quad mx \quad 7$ के लिए m का मान ज्ञात कीजिए।

(ii) समीकरण $5x \quad 4y \quad 10$ तथा $3x \quad 2y \quad 16 \quad 0$ को हल कीजिए और $y \quad mx \quad 3$ के लिए m का मान ज्ञात कीजिए।

हल (i) दी गई समीकरण

$$2x \quad 3y \quad 13 \quad ...(i)$$

तथा $7x \quad 2y \quad 20$ ...(ii)

समी (i) से $x \quad \frac{13 \quad 3y}{2}$, समी (ii) में प्रतिस्थापित करने पर,

$$7 \quad \frac{13 \quad 3y}{2} \quad 2y \quad 20$$

$$91 \quad 21y \quad 4y \quad 40$$

$$17y \quad 40 \quad 91$$

$$17y \quad 51$$

$$y \quad \frac{51}{17} \quad 3$$

तथा $x \quad \frac{13 \quad 3(\quad 3)}{2} \quad \frac{13 \quad 9}{2} \quad \frac{4}{2} \quad 2$

अब, $x \quad 2, y \quad 3$ समीकरण $y \quad mx \quad 7$ में रखने पर,

$$3 \quad 2m \quad 7$$

$$2m \quad 3 \quad 7$$

$$2m \quad 10$$

$$m \quad \frac{10}{2} \quad 5$$

(ii) दी गई समीकरण

$$5x \quad 4y \quad 10 \quad ...(i)$$

तथा $3x \quad 2y \quad 16 \quad 0$ ...(ii)

समी (ii) से $x \quad \frac{2y \quad 16}{3}$, समी (i) में प्रतिस्थापित करने पर,

$$5 \quad \frac{2y \quad 16}{3} \quad 4y \quad 10$$

$$10y \quad 80 \quad 12y \quad 30$$

$$22y \quad 30 \quad 80$$

$$22y \quad 110$$

$$y \quad \frac{110}{22} \quad 5$$

तथा $x \quad \frac{2(5) \quad 16}{3}$

$$x \quad \frac{10 \quad 16}{3}$$

$$x \quad \frac{6}{3} \quad 2$$

अब, $x \quad 2$ तथा $y \quad 5$ समीकरण $y \quad mx \quad 3$ में रखने पर,

$$5 \quad 2m \quad 3$$

$$2m \quad 3 \quad 5$$

$$2m \quad 2$$

$$m \quad \frac{2}{2} \quad 1$$

4. निम्न रैखिक समीकरणों के युग्म में x तथा y के मान प्रतिस्थापन विधि से ज्ञात कीजिए।

(i) $x \quad y \quad a \quad b, \; ax \quad by \quad a^2 \quad b^2$

(ii) $\frac{x}{a} \quad \frac{y}{b} \quad 2, \; ax \quad by \quad a^2 \quad b^2$

(iii) $\frac{bx}{a} \quad \frac{ay}{b} \quad a \quad b \quad 0, bx \quad ay \quad 2ab \quad 0$

(iv) $2(ax \quad by) \quad a \quad 4b \quad 0, 2(bx \quad ay) \quad (b \quad 4a) \quad 0$

(v) $2 \; \frac{x}{a} \quad \frac{y}{b} \quad 2, \frac{x}{a} \quad \frac{y}{b} \quad 4$

हल (i) दी गई समीकरण

$$x \quad y \quad a \quad b \quad ...(i)$$

तथा $ax \quad by \quad a^2 \quad b^2$ ...(ii)

समी (i) से $y \quad a \quad b \quad x$, समी (ii) में प्रतिस्थापित करने पर,

$$ax \quad b(a \quad b \quad x) \quad a^2 \quad b^2$$

$$ax \quad ab \quad b^2 \quad bx \quad a^2 \quad b^2$$

$$(a \quad b)x \quad a^2 \quad b^2 \quad ab \quad b^2$$

$(a \quad b)x \quad a^2 \quad ab$

$(a \quad b)x \quad a(a \quad b)$

$x \quad \frac{a(a \quad b)}{(a \quad b)} \quad a$

तथा $y \quad a \quad b \quad a \quad b$

अत: $x \quad a, y \quad b$ समीकरण युग्म का हल है।

(ii) दी गई समीकरण

$\frac{x}{a} \quad \frac{y}{b} \quad 2$ ...(i)

तथा $ax \quad by \quad a^2 \quad b^2$ ...(ii)

समी (ii) से $x \quad \frac{a^2 \quad b^2 \quad by}{a}$, समी (i) में प्रतिस्थापित करने पर,

$\frac{1}{a} \quad \frac{a^2 \quad b^2 \quad by}{a} \quad \frac{y}{b} \quad 2$

$a^2 \quad b^2 \quad by \quad \frac{a^2}{b} y \quad 2a^2$

$b \quad \frac{a^2}{b} y \quad 2a^2 \quad a^2 \quad b^2$

$\frac{b^2 \quad a^2}{b} y \quad a^2 \quad b^2$

$y \quad \frac{(a^2 \quad b^2)b}{(b^2 \quad a^2)} \quad b$

तथा $x \quad \frac{a^2 \quad b^2 \quad b^2}{a}$

$x \quad \frac{a^2}{a} \quad a$

अत: $x \quad a, y \quad b$ समीकरण युग्म का हल है।

(iii) दी गई समीकरण

$\frac{bx}{a} \quad \frac{ay}{b} \quad a \quad b \quad 0$ ...(i)

तथा $bx \quad ay \quad 2ab \quad 0$ ...(ii)

समी (ii) से $x \quad \frac{ay \quad 2ab}{b}$, समी (i) में प्रतिस्थापित करने पर,

$\frac{b}{a} \quad \frac{ay \quad 2ab}{b} \quad \frac{a}{b} y \quad a \quad b \quad 0$

$y \quad 2b \quad \frac{a}{b} y \quad a \quad b \quad 0$

$1 \quad \frac{a}{b} \quad y \quad a \quad b \quad 0$

$\frac{b \quad a}{b} y \quad b \quad a$

$y \quad \frac{(b \quad a)b}{(b \quad a)} \quad b$

तथा $x \quad \frac{a(b) \quad 2ab}{b}$

$\frac{ab \quad 2ab}{b} \quad \frac{ab}{b} \quad a$

अत: $x \quad a, y \quad b$ समीकरण युग्म का हल है।

(iv) दी गई समीकरण

$2(ax \quad by) \quad a \quad 4b \quad 0$ ...(i)

तथा $2(bx \quad ay) \quad (b \quad 4a) \quad 0$ ...(ii)

समी (i) से, $2ax \quad 2by \quad a \quad 4b$

$2ax \quad a \quad 4b \quad 2by$

$x \quad \frac{a \quad 4b \quad 2by}{2a}$

समी (ii) में प्रतिस्थापित करने पर,

$2b \quad \frac{a \quad 4b \quad 2by}{2a} \quad 2ay \quad (b \quad 4a) \quad 0$

$ab \quad 4b^2 \quad 2b^2y \quad 2a^2y \quad ab \quad 4a^2 \quad 0$

$(2a^2 \quad 2b^2)y \quad 4a^2 \quad 4b^2$

$y \quad \frac{4(a^2 \quad b^2)}{2(a^2 \quad b^2)} \quad 2$

तथा $x \quad \frac{a \quad 4b \quad 4b}{2a} \quad \frac{a}{2a} \quad \frac{1}{2}$

अत: $x \quad \frac{1}{2}, y \quad 2$ समीकरण युग्म का हल है।

(v) दी गई समीकरण

$2 \quad \frac{x}{a} \quad \frac{y}{b} \quad 2$ ...(i)

तथा $\frac{x}{a} \quad \frac{y}{b} \quad 4$ ...(ii)

समी (ii) से $a \quad 4 \quad \frac{y}{b}$

समी (i) में रखने पर,

$\frac{2}{a} \quad a \quad 4 \quad \frac{y}{b} \quad \frac{y}{b} \quad 2$

$8 \quad \frac{2y}{b} \quad \frac{y}{b} \quad 2$

$\frac{3}{b} y \quad 2 \quad 8$

$y \quad 6 \quad \frac{b}{3} \quad 2b$

तथा $x \quad a \quad 4 \quad \frac{2b}{b}$

$x \quad a(4 \quad 2) \quad 2a$

अत: $x \quad 2a, y \quad 2b$ समीकरण युग्म का हल हैं।

5. एक आदमी के पास ₹ 1 तथा 50 पैसे के सिक्के हैं जिसे मिलाकर कुल धनराशि ₹ 100 है। यदि सभी 50 पैसे के सिक्कों तथा सभी ₹ 1 के सिक्कों की कीमत समान है, तो ₹ 1 तथा 50 पैसे के सिक्कों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल माना आदमी के पास ₹ 1 के सिक्के x

तथा 50 पैसे के सिक्के y

प्रथम प्रतिबन्ध से,

$$1\ x\ \frac{1}{2}y\ 100 \qquad \because 50 \text{ पैसे } ₹\frac{1}{2}$$

$$2x\ y\ 200 \qquad \ldots(i)$$

द्वितीय प्रतिबन्ध से, $x\ \frac{1}{2}y$

$$2x\ y \qquad \ldots(ii)$$

समी (ii) से $y\ 2x$, समी (i) में रखने पर,

$$2x\ 2x\ 200$$
$$4x\ 200$$
$$x\ \frac{200}{4}\ 5$$

तथा $y\ 2(50)\ 100$

अत: ₹ 1 के सिक्के 50 तथा 50 पैसे के सिक्के 100 हैं।

6. *ABC* में, $C\ 5\ B\ 3(A\ B)$, *ABC* के सभी कोणों को ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, ABC में,

$$C\ 5\ B\ 3(A\ B) \qquad \ldots(i)$$

हमें ज्ञात है, $A\ B\ C\ 180 \qquad \ldots(ii)$

$$3(A\ B)\ 3\ C\ 3\ 180$$

[3 से गुणा करने पर]

$$C\ 3\ C\ 540$$

[समी (i) से $C\ 3(A\ B)$]

$$4\ C\ 540 \qquad C\ 135$$

पुन: समी (i) से,

$$C\ 5\ B$$
$$135\ 5\ B$$
$$B\ \frac{135}{5}\ 27$$

पुन: समी (ii) से,

$$A\ 27\ 135\ 180$$
$$A\ 162\ 180$$
$$A\ 180\ 162\ 18$$

अत: $A\ 18$, $B\ 27$, $C\ 135$ है।

7. एक आयताकार बाग की परिमिति 54 मी है। इसके आकार को कम करने पर इसकी लम्बाई वास्तविक लम्बाई के $\frac{3}{5}$ हो जाती है तथा चौड़ाई इसकी वास्तविक चौड़ाई के $\frac{3}{4}$ हो जाती है। यदि आकार कम करने के बाद बाग की परिमिति 36 मी है, तो बाग की वास्तविक लम्बाई तथा चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

हल माना बाग की लम्बाई x मी तथा चौड़ाई y मी

प्रथम प्रतिबन्ध से,

आयताकार बाग की परिमिति 2(लम्बाई चौड़ाई)

$$54\ 2(x\ y)$$
$$x\ y\ \frac{54}{2}\ 27 \qquad \ldots(i)$$

द्वितीय प्रतिबन्ध से, आकार कम करने पर,

लम्बाई $\frac{3}{5}x$, चौड़ाई $\frac{3}{4}y$

अब, आयताकार बाग की परिमिति

$$2\ \frac{3}{5}x\ \frac{3}{4}y$$
$$36\ \frac{2(12x\ 15y)}{20}$$
$$36\ \frac{12x\ 15y}{10}$$
$$12x\ 15y\ 360$$
$$4x\ 5y\ 120 \qquad \ldots(ii)$$

[3 से भाग देने पर]

समी (i) से $y\ 27\ x$, समी (ii) में रखने पर,

$$4x\ 5(27\ x)\ 120$$
$$4x\ 135\ 5x\ 120$$
$$x\ 120\ 135$$
$$x\ 15$$
$$x\ 15$$

तथा $y\ 27\ 15$

$$y\ 12$$

अत: बाग की वास्तविक लम्बाई 15 मी तथा वास्तविक चौड़ाई 12 मी है।

प्रश्नावली 3.3

1. निम्न रैखिक समीकरणों के युग्म को विलोपन विधि से हल कीजिए।

(i) $8x\ 5y\ 11, x\ y\ 4$

(ii) $4x\ 3y\ 8, 6x\ y\ \frac{29}{3}$

(iii) $3x\ 5y\ 4, 9x\ 2y\ 7\ 0$

(iv) $0.4x\ 0.3y\ 1.7, 0.7x\ 0.2y\ 0.8$

(v) $\frac{x}{4}\ \frac{y}{3}\ \frac{1}{12}, \frac{x}{2}\ \frac{5}{4}y\ \frac{7}{4}$

हल (i) दी गई समीकरण, $8x\ 5y\ 11 \qquad \ldots(i)$

तथा $x\ y\ 4 \qquad \ldots(ii)$

समी (ii) को 5 से गुणा करके समी (i) में से घटाने पर,

$$3x\ 9$$
$$x\ \frac{9}{3}\ 3$$

x का मान समी (ii) में रखने पर,

$$3\ y\ 4$$

$y \quad 4 \quad 3 \quad 7$

अत: $x \quad 3, y \quad 7$ समीकरण युग्म का हल है।

(ii) दी गई समीकरण

$4x \quad 3y \quad 8$ ...(i)

तथा $6x \quad y \quad \frac{29}{3}$ ...(ii)

समी (ii) को 3 से गुणा करके समी (i) में से घटाने पर,

$14x \quad 21$

$x \quad \frac{21}{14} \quad \frac{3}{2}$

x का मान समी (ii) में रखने पर,

$6 \quad \frac{3}{2} \quad y \quad \frac{29}{3}$

$y \quad \frac{18}{2} \quad \frac{29}{3} \quad \frac{54 \quad 58}{6}$

$y \quad \frac{4}{6} \quad \frac{2}{3}$

अत: $x \quad \frac{3}{2}, y \quad \frac{2}{3}$ समीकरण युग्म के हल हैं।

(iii) दी गई समीकरण, $3x \quad 5y \quad 4$ ...(i)

तथा $9x \quad 2y \quad 7 \quad 0$ ...(ii)

समी (i) में 3 से गुणा करके समी (ii) को घटाने पर, $13y \quad 5$

$y \quad \frac{5}{13}$

y का मान समी (i) में रखने पर,

$3x \quad 5 \quad \frac{5}{13} \quad 4$

$3x \quad \frac{25}{13} \quad 4$

$3x \quad 4 \quad \frac{25}{13}$

$3x \quad \frac{52 \quad 25}{13}$

$3x \quad \frac{27}{13}$

$x \quad \frac{27}{13 \quad 3} \quad \frac{9}{13}$

अत: $x \quad \frac{9}{13}, y \quad \frac{5}{13}$ समीकरण युग्म का हल हैं।

(iv) दी गई समीकरण

$0.4x \quad 0.3y \quad 1.7$ ...(i)

तथा $0.7x \quad 0.2y \quad 0.8$ ...(ii)

समी (i) को 2 से तथा समी (ii) को 3 से गुणा करके जोड़ने पर,

$2.9x \quad 5.8$

$x \quad \frac{5.8}{2.9} \quad 2$

x का मान समी (i) में रखने पर,

$(0.4) \ (2) + (0.3)y \quad 1.7$

$0.8 \quad 0.3y \quad 1.7$

$0.3y \quad 1.7 \quad 0.8$

$0.3y \quad 0.9$

$y \quad \frac{0.9}{0.3} \quad 3$

अत: $x \quad 2, y \quad 3$ समीकरण युग्म का हल है।

(v) दी गई समीकरण

$\frac{x}{4} \quad \frac{y}{3} \quad \frac{1}{2}$ ...(i)

तथा $\frac{x}{2} \quad \frac{5}{4}y \quad \frac{7}{4}$ ...(ii)

उपरोक्त समीकरण को सरल करके लिखने पर,

$3x \quad 4y \quad 1$ ...(i)

तथा $2x \quad 5y \quad 7$ ...(ii)

समी (i) को 5 से तथा समी (ii) को 4 से गुणा करके जोड़ने पर,

$23x \quad 23 \quad x \quad \frac{23}{23} \quad 1$

x का मान समी (i) में रखने पर,

$3(1) \quad 4y \quad 1$

$4y \quad 1 \quad 3 \quad 4y \quad 4$

$y \quad \frac{4}{4} \quad 1$

अत: $x \quad 1, y \quad 1$ समीकरण युग्म का हल है।

2. निम्न रैखिक समीकरणों के युग्म को विलोपन विधि से हल कीजिए।

(i) $ax \quad by \quad c, a^2x \quad b^2y \quad c^2$

(ii) $(a \quad b)x \quad (a \quad b)y \quad 2ab,$

$(a \quad b)x \quad (a \quad b)y \quad ab$

(iii) $\frac{bx}{a} \quad \frac{ay}{b} \quad a^2 \quad b^2, x \quad y \quad 2ab$

हल (i) दी गई समीकरण,

$ax \quad by \quad c$ ...(i)

तथा $a^2x \quad b^2y \quad c^2$ ...(ii)

समी (i) में b से गुणा करके समी (ii) में से घटाने पर,

$abx \quad a^2x \quad bc \quad c^2$

$ax(b \quad a) \quad c(b \quad c)$

$x \quad \frac{c(b \quad c)}{a(b \quad a)}$

x का मान समी (i) में रखने पर,

$\frac{a \quad c(b \quad c)}{a(b \quad a)} \quad by \quad c$

$by \quad c \quad \frac{c(b \quad c)}{b \quad a}$

$$by \quad \frac{bc \quad ca \quad bc \quad c^2}{b \quad a}$$

$$by \quad \frac{c(c \quad a)}{(b \quad a)} \quad y \quad \frac{c(c \quad a)}{b(b \quad a)}$$

अत: $x \quad \frac{c(b \quad c)}{a(b \quad a)}$

तथा $y \quad \frac{c(c \quad a)}{b(b \quad a)}$

समीकरण युग्म का हल है।

(ii) दी गई समीकरण

$$(a \quad b)x \quad (a \quad b)y \quad 2ab \qquad \ldots(i)$$

तथा $(a \quad b)x \quad (a \quad b)y \quad ab \qquad \ldots(ii)$

समी (i) तथा (ii) को जोड़ने पर,

$$2(a \quad b)x \quad 3ab$$

$$x \quad \frac{3ab}{2(a \quad b)}$$

x का मान समी (i) में रखने पर,

$$(a \quad b) \quad \frac{3ab}{2(a \quad b)} \quad (a \quad b)y \quad 2ab$$

$$\frac{3}{2}ab \quad (a \quad b)y \quad 2ab$$

$$(a \quad b)y \quad 2ab \quad \frac{3}{2}ab$$

$$(a \quad b)y \quad \frac{ab}{2}$$

$$y \quad \frac{ab}{2(a \quad b)}$$

अत: $x \quad \frac{3ab}{2(a \quad b)}, y \quad \frac{ab}{2(a \quad b)}$

समीकरण युग्म का हल है।

(iii) दी गई समीकरण

$$\frac{bx}{a} \quad \frac{ay}{b} \quad a^2 \quad b^2 \qquad \ldots(i)$$

तथा $x \quad y \quad 2ab \qquad \ldots(ii)$

समी (ii) को $\frac{a}{b}$ से गुणा करके समी (i) में से घटाने पर,

$$\frac{b}{a} \quad \frac{a}{b}x \quad a^2 \quad b^2 \quad 2a^2$$

$$\frac{(b^2 \quad a^2)x}{ab} \quad b^2 \quad a^2$$

$$x \quad \frac{(b^2 \quad a^2)ab}{(b^2 \quad a^2)} \quad ab$$

x का मान समी (ii) में रखने पर,

$$ab \quad y \quad 2ab$$

$$y \quad 2ab \quad ab \quad ab$$

अत: $x \quad ab, y \quad ab$ समीकरण युग्म का हल है।

3. निम्न रैखिक समीकरणों के युग्म को विलोपन विधि से हल कीजिए।

(i) $89x \quad 91y \quad 449, 91x \quad 89y \quad 451$

(ii) $117x \quad 231y \quad 579, 231x \quad 117y \quad 465$

(iii) $41x \quad 17y \quad 99, 17x \quad 41y \quad 75$

हल (i) दी गई समीकरण

$$89x \quad 91y \quad 449 \qquad \ldots(i)$$

तथा $91x \quad 89y \quad 451 \qquad \ldots(ii)$

समी (i) को 89 तथा समी (ii) को 91 से गुणा करके घटाने पर,

$$360x \quad 1080$$

$$x \quad \frac{1080}{360} \quad 3$$

x का मान समी (i) में रखने पर,

$$267 \quad 91y \quad 449$$

$$91y \quad 449 \quad 267$$

$$91y \quad 182$$

$$y \quad \frac{182}{91} \quad 2$$

अत: $x \quad 3, y \quad 2$ समीकरण युग्म का हल है।

(ii) दी गई समीकरण

$$117x \quad 231y \quad 579 \qquad \ldots(i)$$

तथा $231x \quad 117y \quad 465 \qquad \ldots(ii)$

समी (i) को 117 से तथा समी (ii) को 231 से गुणा करके घटाने पर,

$$[(117)^2 \quad (231)^2]x \quad 67743 \quad 107415$$

$$(117 \quad 231)(117 \quad 231)x \quad 39672$$

$$348 \quad (\ 114)x \quad 3967$$

$$x \quad \frac{39672}{348 \quad 114}$$

$$x \quad \frac{39672}{39672} \quad 1$$

x का मान समी (i) में रखने पर,

$$117 \quad 221y \quad 579$$

$$231y \quad 579 \quad 117$$

$$231y \quad 462$$

$$y \quad \frac{462}{231} \quad 2$$

अत: $x \quad 1, y \quad 2$ समीकरण युग्म का हल है।

(iii) दी गई समीकरण $41x \quad 17y \quad 99 \qquad \ldots(i)$

तथा $17x \quad 41y \quad 75 \qquad \ldots(ii)$

समी (i) को 41 तथा समी (ii) को 17 से गुणा करके घटाने पर,

$$1392x \quad 2784$$

$$x \quad \frac{2784}{1392} \quad 2$$

x का मान समी (i) में रखने पर,

$$41(2) \quad 17y \quad 99$$
$$17y \quad 99 \quad 82$$
$$17y \quad 17$$
$$y \quad \frac{17}{17} \quad 1$$

अत: $x \quad 2, y \quad 1$ समीकरण युग्म का हल है।

4. समीकरण $\frac{x}{10} \quad \frac{y}{5} \quad 1 \quad 0$ और $\frac{x}{8} \quad \frac{y}{6} \quad 15$ के युग्म का हल ज्ञात कीजिए। इसके बाद का मान भी ज्ञात कीजिए, यदि $y \quad x \quad 5$ है।

हल दी गई समीकरण, $\frac{x}{10} \quad \frac{y}{5} \quad 1 \quad 0$ ...(i)

तथा $\frac{x}{8} \quad \frac{y}{6} \quad 15$ ...(ii)

को सरल करके लिखने पर,

$$x \quad 2y \quad 10 \quad \text{...(iii)}$$

तथा $3x \quad 4y \quad 360$ ...(iv)

समी (iii) में 2 से गुणा करके समी (iv) में से घटाने पर,

$$x \quad 340$$
$$x \quad 340$$

x का मान समी (i) में रखने पर,

$$340 \quad 2y \quad 10$$
$$2y \quad 10 \quad 340$$
$$2y \quad 330$$
$$y \quad \frac{330}{2} \quad 165$$

अत: $x \quad 340$, तथा $y \quad 165$ समीकरण युग्म का हल है।

अब, $x \quad 340$ तथा $y \quad 165$ समीकरण $y \quad x \quad 5$ में रखने पर,

$$165 \quad (340) \quad 5$$
$$340 \quad 165 \quad 5$$
$$340 \quad 170$$
$$\frac{170}{340} \quad \frac{1}{2}$$

5. दो अंकों की एक संख्या के अंकों का योग 8 है। यदि उस संख्या तथा उसके अंकों का स्थान परस्पर बदलने से प्राप्त संख्या का अन्तर 18 हो तो, उस संख्या को ज्ञात कीजिए।

हल माना दहाई का अंक x

तथा इकाई का अंक y

मूल संख्या $10x \quad y$

प्रथम प्रतिबन्ध से, $x \quad y \quad 8$ ...(i)

द्वितीय प्रतिबन्ध से,

$$(10x \quad y) \quad (10y \quad x) \quad 18$$
$$10x \quad y \quad 10y \quad x \quad 18$$
$$9x \quad 9y \quad 18$$
$$x \quad y \quad 2 \quad \text{...(ii)}$$

[2 से भाग देने पर]

अब, समी (i) तथा (ii) को जोड़ने पर,

$$2x \quad 10 \quad x \quad 5$$

x का मान समी (i) में रखने पर,

$$5 \quad y \quad 8 \quad y \quad 8 \quad 5 \quad 3$$

मूल संख्या $10(5) \quad 3 \quad 50 \quad 3 \quad 53$

अत: मूल संख्या 53 है।

6. यदि एक आयत की लम्बाई 5 इकाई कम कर दें तथा चौड़ाई 2 इकाई बढ़ा दें, तो इसका क्षेत्रफल 80 वर्ग इकाई कम हो जाता है। यदि इसकी लम्बाई में 10 इकाई की वृद्धि कर दी जाए तथा चौड़ाई में 5 इकाई की कमी कर दी जाए, तो इसका क्षेत्रफल 50 वर्ग इकाई बढ़ जाता है। आयत की लम्बाई तथा चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

हल माना आयत की लम्बाई x, चौड़ाई y

आयत का क्षेत्रफल xy

[$\because$ आयत का क्षेत्रफल लम्बाई चौड़ाई]

प्रथम प्रतिबन्ध से,

$$(x \quad 5)(y \quad 2) \quad xy \quad 80$$
$$xy \quad 2x \quad 5y \quad 10 \quad xy \quad 80$$
$$2x \quad 5y \quad 80 \quad 10$$
$$2x \quad 5y \quad 70 \quad \text{...(i)}$$

द्वितीय प्रतिबन्ध से,

$$(x \quad 10)(y \quad 5) \quad xy \quad 50$$
$$xy \quad 5x \quad 10y \quad 50 \quad xy \quad 50$$
$$5x \quad 10y \quad 50 \quad 50$$
$$5x \quad 10y \quad 100$$
$$x \quad 2y \quad 20 \quad \text{...(ii)} \quad [5 \text{ से भाग देने पर}]$$

समी (ii) में 2 से गुणा करके समी (i) को जोड़ने पर,

$$y \quad 30 \quad y \quad 30$$

y का मान समी (i) में रखने पर,

$$2x \quad 5(30) \quad 70$$
$$2x \quad 70 \quad 150$$
$$2x \quad 80$$
$$x \quad \frac{80}{2} \quad 40$$

अत: आयत की लम्बाई 40 इकाई

तथा चौड़ाई 30 इकाई

7. मन्जू स्टेट बैंक से ₹ 1000 निकालने जाती है तथा कैशियर को केवल ₹ 100 और ₹ 50 के नोट देने के लिए बोलती है। वह कुल 14 नोट प्राप्त करती है। वह ₹ 100 और ₹ 50 के कितने नोट प्राप्त करती है?

हल माना मन्जू ₹ 100 के x नोट तथा ₹ 50 के y नोट प्राप्त करती है।

प्रथम प्रतिबन्ध से,

$$100x \quad 50y \quad 1000$$

$2x \quad y \quad 20$ ...(i)

[50 से भाग देने पर]

द्वितीय प्रतिबन्ध से,

$x \quad y \quad 14$ ...(ii)

समी (i) में से समी (ii) को घटाने पर,

$x \quad 6$

x का मान समी (ii) में रखने पर,

$6 \quad y \quad 14$

$y \quad 14 \quad 6 \quad 8$

अत: ₹ 100 के नोट 6 तथा ₹ 50 के नोट 8 हैं।

प्रश्नावली 3.4

1. निम्नलिखित समीकरणों के युग्मों को रैखिक समीकरणों के युग्म में परिवर्तित कर हल कीजिए।

(i) $\frac{2}{x} \quad \frac{3}{y} \quad 22, \frac{5}{x} \quad \frac{4}{y} \quad 9$

(ii) $\frac{5}{x} \quad 6y \quad 13, \frac{3}{x} \quad 4y \quad 7$

(iii) $x \quad \frac{6}{y} \quad 6, 3x \quad \frac{8}{y} \quad 5$

(iv) $4x \quad 6y \quad 3xy, 8x \quad 9y \quad 5xy$

(v) $\frac{2}{x} \quad \frac{3}{y} \quad \frac{9}{xy}, \frac{4}{x} \quad \frac{9}{y} \quad \frac{21}{xy}, \; x \quad 0, y \quad 0$

(vi) $\frac{3y \quad x}{xy} \quad 9, \frac{2y \quad 3x}{xy} \quad 5, \; xy \quad 0$

(vii) $\frac{5}{x \quad 1} \quad \frac{2}{y \quad 1} \quad \frac{1}{2}, \frac{10}{x \quad 1} \quad \frac{2}{y \quad 1} \quad \frac{5}{2},$

$x \quad 1, y \quad 1$

(viii) $\frac{6}{x \quad y} \quad \frac{7}{x \quad y} \quad 3, \; \frac{1}{2(x \quad y)} \quad \frac{1}{3(x \quad y)}, \; x \quad y \quad 0,$

$x \quad y \quad 0$

हल (i) दी गई समीकरणें,

$\frac{2}{x} \quad \frac{3}{y} \quad 22$ ...(i)

तथा $\frac{5}{x} \quad \frac{4}{y} \quad 9$ ...(ii)

माना $\frac{1}{x} \quad u$ तथा $\frac{1}{y} \quad v$

तब, $2u \quad 3v \quad 22$ ...(iii)

तथा $5u \quad 4v \quad 9$ ...(iv)

समी (iii) को 4 से तथा समी (iv) को 3 से गुणा करके जोड़ने पर,

$23u \quad 115$

$u \quad \frac{115}{23} \quad 5$

u का मान समी (iii) में रखने पर,

$2(5) \quad 3v \quad 22$

$10 \quad 3v \quad 22$

$3v \quad 22 \quad 10$

$3v \quad 12$

$v \quad \frac{12}{3} \quad 4$

अब, $u \quad 5$ तथा $v \quad 4$

$\frac{1}{x} \quad 5$ तथा $\frac{1}{y} \quad 4$

$x \quad \frac{1}{5} \qquad y \quad \frac{1}{4}$

अत: $x \quad \frac{1}{5}$ तथा $y \quad \frac{1}{4}$ समीकरण युग्म का हल है।

(ii) दी गई समीकरणें

$\frac{5}{x} \quad 6y \quad 13$ ...(i)

तथा $\frac{3}{x} \quad 4y \quad 7$ ...(ii)

माना $\frac{1}{x} \quad u$

तब, $5u \quad 6y \quad 13$ ...(iii)

तथा $3u \quad 4y \quad 7$ ...(iv)

समी (iii) को 2 तथा समी (iv) को 3 से गुणा करके घटाने पर,

$u \quad 5$

u का मान समी (iii) में रखने पर,

$25 \quad 6y \quad 13$

$6y \quad 13 \quad 25$

$6y \quad 12$

$y \quad \frac{12}{6} \quad 2$

अब, $u \quad 5$ तथा $y \quad 2$

$\frac{1}{x} \quad 5 \qquad x \quad \frac{1}{5}$

अत: $x \quad \frac{1}{5}$ तथा $y \quad 2$ समीकरण युग्म का हल है।

(iii) दी गई समीकरणें,

$x \quad \frac{6}{y} \quad 6$ ...(i)

तथा $3x \quad \frac{8}{y} \quad 5$ ...(ii)

माना $\frac{1}{y} \quad v$

तब, $x \quad 6v \quad 6$ ...(iii)

$3x \quad 8v \quad 5$ ...(iv)

समी (iii) में 3 से गुणा करके इसमें से समी (iv) को घटाने पर,

$26v \quad 13$

$$v \quad \frac{13}{26} \quad \frac{1}{2}$$

v का मान समी (iii) में रखने पर,

$$x \quad 6\,\frac{1}{2} \quad 6$$

$$x \quad 3 \quad 6$$

$$x \quad 6 \quad 3 \quad 3$$

अब, $x \quad 3$ तथा $v \quad \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{y} \quad \frac{1}{2} \qquad y \quad 2$$

अत: $x \quad 3$ तथा $y \quad 2$ समीकरण युग्म का हल हैं।

(iv) दी गई समीकरणें,

$$4x \quad 6y \quad 3xy$$

तथा $\qquad 8x \quad 9y \quad 5xy$

उपरोक्त समीकरणों को xy से भाग देने पर,

$$\frac{4}{y} \quad \frac{6}{x} \quad 3 \qquad \ldots(i)$$

$$\frac{8}{y} \quad \frac{9}{x} \quad 5 \qquad \ldots(ii)$$

माना $\frac{1}{x} \quad u$ तथा $\frac{1}{y} \quad v$

तब, $\qquad 4v \quad 6u \quad 3 \qquad \ldots(iii)$

तथा $\qquad 8v \quad 9u \quad 5 \qquad \ldots(iv)$

समी (iii) में 2 से गुणा करके इसमें से समी (iv) को घटाने पर,

$$3u \quad 1 \quad \frac{1}{3}$$

u का मान समी (iii) में रखने पर,

$$4v \quad 6\,\frac{1}{3} \quad 3$$

$$4v \quad 2 \quad 3$$

$$4v \quad 3 \quad 2$$

$$4v \quad 1$$

$$v \quad \frac{1}{4}$$

अब, $u \quad \frac{1}{3}$ तथा $v \quad \frac{1}{4}$

$$\frac{1}{x} \quad \frac{1}{3} \text{ तथा } \frac{1}{y} \quad \frac{1}{4}$$

$x \quad 3$ तथा $y \quad 4$

अत: $x \quad 3$ तथा $y \quad 4$ समीकरण युग्म का हल है।

(v) दी गई समीकरणें,

$$\frac{2}{x} \quad \frac{3}{y} \quad \frac{9}{xy} \qquad \ldots(i)$$

तथा $\qquad \frac{4}{x} \quad \frac{9}{y} \quad \frac{21}{xy} \qquad \ldots(ii)$

समी (i) तथा (ii) को सरल करके लिखने पर,

$$2y \quad 3x \quad 9 \qquad \ldots(iii)$$

तथा $\qquad 4y \quad 9x \quad 21 \qquad \ldots(iv)$

समी (iii) में 2 से गुणा करके समी (iv) को घटाने पर, $\qquad 3x \quad 3$

$$x \quad \frac{3}{3} \quad 1$$

x का मान समी (iii) में रखने पर,

$$2y \quad 3(1) \quad 9$$

$$2y \quad 6$$

$$y \quad \frac{6}{2} \quad 3$$

अत: $x \quad 1,$ तथा $y \quad 3$ समीकरण युग्म का हल है।

(vi) दी गई समीकरणें,

$$\frac{3y \quad x}{xy} \quad 9 \qquad \ldots(i)$$

तथा $\qquad \frac{2y \quad 3x}{xy} \quad 5 \qquad \ldots(ii)$

समी (i) तथा (ii) को निम्न प्रकार लिखने पर,

$$\frac{3y}{xy} \quad \frac{x}{xy} \quad 9 \text{ तथा } \frac{2y}{xy} \quad \frac{3x}{xy} \quad 5$$

या $\qquad \frac{3}{x} \quad \frac{1}{y} \quad 9 \qquad \ldots(i)$

तथा $\qquad \frac{2}{x} \quad \frac{3}{y} \quad 5 \qquad \ldots(ii)$

माना $\frac{1}{x} \quad u$ तथा $\frac{1}{y} \quad v$

तब, $\qquad 3u \quad v \quad 9 \qquad \ldots(iii)$

तथा $\qquad 2u \quad 3v \quad 5 \qquad \ldots(iv)$

समी (iii) को 3 से गुणा करके इसे समी (iv) में जोड़ने पर,

$$11u \quad 22$$

$$u \quad \frac{22}{11} \quad 2$$

u का मान समी (iii) में रखने पर,

$$3(\ 2) \quad v \quad 9$$

$$6 \quad v \quad 9$$

$$v \quad 9 \quad 6$$

$$v \quad 3 \qquad v \quad 3$$

अब, $u \quad 2$ तथा $v \quad 3$

$$\frac{1}{x} \quad 2 \text{ तथा } \frac{1}{y} \quad 3$$

$$x \quad \frac{1}{2} \text{ तथा } y \quad \frac{1}{3}$$

अत: $x \quad \frac{1}{2}$ तथा $y \quad \frac{1}{3}$ समीकरण युग्म का हल है

(vii) दी गई समीकरणें,

$$\frac{5}{x\ \ 1}\ \ \frac{2}{y\ \ 1}\ \ \frac{1}{2} \qquad \ldots(i)$$

तथा $$\frac{10}{x\ \ 1}\ \ \frac{2}{y\ \ 1}\ \ \frac{5}{2} \qquad \ldots(ii)$$

माना $\frac{1}{x\ \ 1}\ \ u$ तथा $\frac{1}{y\ \ 1}\ \ v$

तब, $$5u\ \ 2v\ \ \frac{1}{2} \qquad \ldots(iii)$$

तथा $$10u\ \ 2v\ \ \frac{5}{2} \qquad \ldots(iv)$$

समी (iii) तथा (iv) को जोड़ने पर,

$$15u\ \ \frac{6}{2}$$

$$15u\ \ 3$$

$$u\ \ \frac{3}{15}\ \ \frac{1}{5}$$

u का मान समी (iii) में रखने पर,

$$5\ \frac{1}{5}\ \ 2v\ \ \frac{1}{2}$$

$$1\ \ 2v\ \ \frac{1}{2}$$

$$2v\ \ \frac{1}{2}\ \ 1$$

$$2v\ \ \frac{1}{2}\qquad v\ \ \frac{1}{4}$$

अब, $u\ \ \frac{1}{5}$ तथा $v\ \ \frac{1}{4}$

$\frac{1}{x\ \ 1}\ \ \frac{1}{5}$ तथा $\frac{1}{y\ \ 1}\ \ \frac{1}{4}$

$x\ \ 1\ \ 5$ तथा $y\ \ 1\ \ 4$

$x\ \ 5\ \ 1$ तथा $y\ \ 4\ \ 1$

$x\ \ 4$ तथा $y\ \ 5$

अत: $x\ \ 4$ तथा $y\ \ 5$ समीकरण युग्म का हल है।

(viii) दी गई समीकरणें,

$$\frac{6}{x\ \ y}\ \ \frac{7}{x\ \ y}\ \ 3 \qquad \ldots(i)$$

तथा $$\frac{1}{2(x\ \ y)}\ \ \frac{1}{3(x\ \ y)} \qquad \ldots(ii)$$

माना $\frac{1}{x\ \ y}\ \ u$ तथा $\frac{1}{x\ \ y}\ \ v$

तब, $6u\ \ 7v\ \ 3$ तथा $\frac{u}{2}\ \ \frac{v}{3}$

$$6u\ \ 7v\ \ 3 \qquad \ldots(iii)$$

तथा $$3u\ \ 2u$$

$$3u\ \ 2v\ \ 0 \qquad \ldots(iv)$$

समी (iv) को 2 से गुणा करके समी (iii) में से घटाने पर,

$3v\ \ 3$

$$v\ \ \frac{3}{3}\ \ 1$$

v का मान समी (iii) में रखने पर,

$$6u\ \ 7(\ 1)\ \ 3$$

$$6u\ \ 7\ \ 3$$

$$6u\ \ 3\ \ 7$$

$$6u\ \ 4$$

$$u\ \ \frac{4}{6}$$

$$u\ \ \frac{2}{3}$$

अब, $$u\ \ \frac{2}{3}$$

तथा $$v\ \ 1$$

$$\frac{1}{x\ \ y}\ \ \frac{2}{3}$$

तथा $$\frac{1}{x\ \ y}\ \ \frac{1}{1}$$

$$x\ \ y\ \ \frac{3}{2} \qquad \ldots(v)$$

तथा $$x\ \ y\ \ 1 \qquad \ldots(vi)$$

समी (v) तथा (vi) को जोड़ने पर,

$$2x\ \ \frac{3}{2}\ \ 1$$

$$2x\ \ \frac{3\ \ 2}{2}$$

$$2x\ \ \frac{5}{2}\qquad x\ \ \frac{5}{4}$$

x का मान समी (v) में रखने पर,

$$\frac{5}{4}\ \ y\ \ \frac{3}{2}$$

$$y\ \ \frac{3}{2}\ \ \frac{5}{4}$$

$$y\ \ \frac{6\ \ 5}{4}\qquad \frac{1}{4}$$

अत: $x\ \ \frac{5}{4}$ तथा $y\ \ \frac{1}{4}$ समीकरण युग्म का हल है।

2. निम्न समीकरणों के युग्मों को रैखिक समीकरणों के युग्म में बदलकर हल कीजिए।

(i) $\frac{2xy}{x\ \ y}\ \ \frac{3}{2}, \frac{xy}{2x\ \ y}\ \ \frac{3}{10}; x\ \ y\ \ 0, 2x\ \ y\ \ 0$

(ii) $\frac{2}{3x\ \ 2y}\ \ \frac{3}{3x\ \ 2y}\ \ \frac{17}{5}$,

$\frac{5}{3x\ \ 2y}\ \ \frac{1}{3x\ \ 2y}\ \ 2$

हल (i) दी गई समीकरणें,

$$\frac{2xy}{x \quad y} \quad \frac{3}{2} \qquad \ldots(i)$$

तथा $$\frac{xy}{2x \quad y} \quad \frac{3}{10} \qquad \ldots(ii)$$

समी (i) तथा (ii) को निम्न प्रकार लिखने पर,

$$\frac{x \quad y}{2xy} \quad \frac{2}{3}$$

$$\frac{x}{2xy} \quad \frac{y}{2xy} \quad \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{2y} \quad \frac{1}{2x} \quad \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{y} \quad \frac{1}{x} \quad \frac{4}{3} \qquad \ldots(i)$$

[2 से गुणा करने पर]

तथा $$\frac{2x \quad y}{xy} \quad \frac{10}{3}$$

$$\frac{2x}{xy} \quad \frac{y}{xy} \quad \frac{10}{3}$$

$$\frac{2}{y} \quad \frac{1}{x} \quad \frac{10}{3} \qquad \ldots(ii)$$

माना $\frac{1}{y} \quad v$ तथा $\frac{1}{x} \quad u$

तब, $v \quad u \quad \frac{4}{3} \qquad \ldots(iii)$

तथा $2v \quad u \quad \frac{10}{3} \qquad \ldots(iv)$

समी (iii) तथा (iv) को

जोड़ने पर, $3v \quad \frac{4}{3} \quad \frac{10}{3}$

$$3v \quad \frac{6}{3}$$

$$v \quad \frac{2}{3}$$

v का मान समी (iii) में रखने पर,

$$\frac{2}{3} \quad u \quad \frac{4}{3}$$

$$u \quad \frac{4}{3} \quad \frac{2}{3}$$

$$u \quad \frac{6}{3} \quad 2$$

अब, $v \quad \frac{2}{3}$ तथा $u \quad 2$

$$\frac{1}{y} \quad \frac{2}{3} \text{ तथा } \frac{1}{x} \quad 2$$

$$y \quad \frac{3}{2} \text{ तथा } x \quad \frac{1}{2}$$

अत: $x \quad \frac{1}{2}$ तथा $y \quad \frac{3}{2}$ समीकरण युग्म का हल है।

(ii) दी गई समीकरणें,

$$\frac{2}{3x \quad 2y} \quad \frac{3}{3x \quad 2y} \quad \frac{17}{5} \qquad \ldots(i)$$

तथा $$\frac{5}{3x \quad 2y} \quad \frac{1}{3x \quad 2y} \quad 2 \qquad \ldots(ii)$$

माना $\frac{1}{3x \quad 2y} \quad u$ तथा $\frac{1}{3x \quad 2y} \quad v$

तब, $2u \quad 3v \quad \frac{17}{5} \qquad \ldots(iii)$

तथा $5u \quad v \quad 2 \qquad \ldots(iv)$

समी (iv) को 3 से गुणा करके समी (iii) में से घटाने पर,

$$13u \quad \frac{17}{5} \quad 6$$

$$13u \quad \frac{13}{5}$$

$$u \quad \frac{13}{5 \quad 13} \quad \frac{1}{5}$$

$$3v \quad \frac{15}{5} \qquad 3v \quad 3$$

$$v \quad \frac{3}{3} \quad 1$$

v का मान समी (iv) में रखने पर,

$$5u \quad 1 \quad 2 \qquad 5u \quad 2 \quad 1$$

$$5u \quad 1 \qquad u \quad \frac{1}{5}$$

अब, $u \quad \frac{1}{5}$ तथा $v \quad 1$

$$\frac{1}{3x \quad 2y} \quad \frac{1}{5} \quad \text{तथा} \quad \frac{1}{3x \quad 2y} \quad 1$$

$$3x \quad 2y \quad 5 \qquad \ldots(v)$$

तथा $3x \quad 2y \quad 1 \qquad \ldots(vi)$

समी (v) तथा (vi) को जोड़ने पर,

$$6x \quad 6 \qquad x \quad \frac{6}{6} \quad 1$$

x का मान समी (v) में रखने पर,

$$3(1) \quad 2y \quad 5$$

$$2y \quad 5 \quad 3 \qquad 2y \quad 2$$

$$y \quad \frac{2}{2} \quad 1$$

अत: $x \quad 1, y \quad 1$ समीकरण युग्म का हल है।

3. एक आदमी 600 किमी दूरी का कुछ हिस्सा रेलगाड़ी द्वारा तथा कुछ कार द्वारा तय करता है। यदि वह 320 किमी रेलगाड़ी द्वारा तथा शेष दूरी कार द्वारा तय करता हो, तो उसे 8 घण्टे 40 मिनट लगते हैं। लेकिन वह 200 किमी रेलगाड़ी द्वारा शेष दूरी कार द्वारा तय करता है, तो उसे 30 मिनट अधिक लगते हैं। रेलगाड़ी तथा कार की चाल ज्ञात कीजिए।

हल माना रेलगाड़ी की चाल x किमी/घण्टा

तथा कार की चाल y किमी/घण्टा

प्रथम प्रतिबन्ध से,

$$\frac{320}{x} \quad \frac{600}{y} \quad \frac{320}{y} \quad 8 \text{ घण्टे } 40 \text{ मिनट}$$

$$\frac{320}{x} \quad \frac{280}{y} \quad \frac{26}{3} \text{ घण्टे}$$

$$\frac{8}{x} \quad \frac{7}{y} \quad \frac{26}{3 \quad 40} \qquad [40 \text{ से भाग देने पर}]$$

$$\frac{8}{x} \quad \frac{7}{y} \quad \frac{13}{60} \qquad \ldots(i)$$

द्वितीय प्रतिबन्ध से,

$$\frac{200}{x} \quad \frac{00}{y} \quad \frac{200}{y} \quad 8 \text{ घण्टे } 40 \text{ मिनट} \quad 30 \text{ मिनट}$$

$$\frac{200}{x} \quad \frac{400}{y} \quad 9 \text{ घण्टे } 10 \text{ मिनट}$$

$$\frac{200}{x} \quad \frac{400}{y} \quad \frac{55}{6} \text{ घण्टे}$$

$$\frac{1}{x} \quad \frac{2}{y} \quad \frac{55}{6 \quad 200} \qquad [200 \text{ से भाग देने पर}]$$

$$\frac{1}{x} \quad \frac{2}{y} \quad \frac{11}{240} \qquad \ldots(ii)$$

माना $\frac{1}{x} \quad u$ तथा $\frac{1}{y} \quad v$

तब, $8u \quad 7v \quad \frac{13}{60} \qquad \ldots(iii)$

तथा $u \quad 2v \quad \frac{11}{240} \qquad \ldots(iv)$

समी (iv) को 8 से गुणा करके समी (iii) में से

घटाने पर, $9v \quad \frac{13}{60} \quad \frac{11}{30}$

$$9v \quad \frac{13 \quad 22}{60}$$

$$9v \quad \frac{9}{60} \qquad v \quad \frac{1}{60}$$

v का मान समी (iv) में रखने पर,

$$u \quad 2 \quad \frac{1}{60} \quad \frac{11}{240}$$

$$u \quad \frac{1}{30} \quad \frac{11}{240}$$

$$u \quad \frac{11}{240} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{11 \quad 8}{240}$$

$$u \quad \frac{3}{240} \quad \frac{1}{80}$$

अब, $u \quad \frac{1}{80}$ तथा $v \quad \frac{1}{60}$

$$\frac{1}{x} \quad \frac{1}{80} \text{ तथा } \frac{1}{y} \quad \frac{1}{60}$$

$x \quad 80$ तथा $y \quad 60$

अत: रेलगाड़ी की चाल 80 किमी/घण्टा तथा कार की चाल 60 किमी/घण्टा है।

4. एक मोटरबोट धारा के प्रतिकूल 30 किमी और धारा के अनुकूल 28 किमी जाने में 7 घण्टे का समय लगाती है। वह धारा के प्रतिकूल 21 किमी जाकर 5 घण्टे में वापस आ सकती है। शान्त जल में नाव की चाल और धारा की चाल ज्ञात कीजिए।

हल माना शान्त जल में नाव की चाल x किमी/घण्टा

तथा धारा की चाल y किमी/घण्टा

धारा के अनुकूल सापेक्ष चाल $x \quad y$ तथा

धारा के प्रतिकूल सापेक्ष चाल $x \quad y$

प्रथम प्रतिबन्ध से,

$$\frac{30}{x \quad y} \quad \frac{28}{x \quad y} \quad 7 \qquad \ldots(i)$$

द्वितीय प्रतिबन्ध से,

$$\frac{21}{x \quad y} \quad \frac{21}{x \quad y} \quad 5 \qquad \ldots(ii)$$

माना $\frac{1}{x \quad y} \quad u$ तथा $\frac{1}{x \quad y} \quad v$

तब, $30u \quad 28v \quad 7 \qquad \ldots(iii)$

तथा $21u \quad 21v \quad 5 \qquad \ldots(iv)$

समी (iii) को 3 से तथा (iv) को 4 से गुणा करके घटाने पर, $6u \quad 1$

$$u \quad \frac{1}{6}$$

u का मान समी (iii) में रखने पर,

$$30 \quad \frac{1}{6} \quad 28v \quad 7$$

$$5 \quad 28v \quad 7 \quad 28v \quad 7 \quad 5 \quad 28v \quad 2$$

$$v \quad \frac{2}{28} \quad \frac{1}{14}$$

अब, $u \quad \frac{1}{6}$ तथा $v \quad \frac{1}{14}$

$$\frac{1}{x \quad y} \quad \frac{1}{6} \text{ तथा } \frac{1}{x \quad y} \quad \frac{1}{14}$$

$$x \quad y \quad 6 \ldots(v)$$

तथा $x \quad y \quad 14 \qquad \ldots(vi)$

समी (v) तथा (vi) को जोड़ने पर,

$$2x \quad 20 \qquad x \quad 10$$

x का मान समी (v) में रखने पर,

$$10 \quad y \quad 6$$

$$y \quad 6 \quad 10$$

$$y \quad 4$$

$$y \quad 4$$

अत: नाव की चाल 10 किमी/घण्टा तथा धारा की चाल 4 किमी/घण्टा है।

5. 8 आदमी व 12 लड़के एक काम को 10 दिन में पूरा करते हैं, जबकि 6 आदमी व 8 लड़के उसी काम को 14 दिन में पूरा करते हैं। एक आदमी अकेला उस काम को कितने दिनों में पूरा करेगा?

हल माना एक आदमी काम को x दिन में तथा एक लड़का काम को y दिन में पूरा करेगा।

1 आदमी का 1 दिन का काम $\frac{1}{x}$

तथा 1 लड़के का 1 दिन का काम $\frac{1}{y}$

प्रथम प्रतिबन्ध से,

$$\frac{8}{x} \quad \frac{12}{y} \quad \frac{1}{10} \qquad \ldots(i)$$

द्वितीय प्रतिबन्ध से,

$$\frac{6}{x} \quad \frac{8}{y} \quad \frac{1}{14} \qquad \ldots(ii)$$

माना $\frac{1}{x} \quad u$ तथा $\frac{1}{y} \quad v$

तब, $\qquad 8u \quad 12v \quad \frac{1}{10} \qquad \ldots(iii)$

$$6u \quad 8v \quad \frac{1}{14} \qquad \ldots(iv)$$

समी (iii) को 2 से तथा समी (iv) को 3 से गुणा करके घटाने पर,

$$2u \quad \frac{1}{5} \quad \frac{3}{14}$$

$$2u \quad \frac{14 \quad 15}{70} \qquad 2u \quad \frac{1}{70}$$

$$u \quad \frac{1}{140} \qquad \frac{1}{x} \quad \frac{1}{140} \qquad x \quad 140$$

अत: एक आदमी काम को 140 दिनों में पूरा करेगा।

6. एक कक्षा के छात्रों को पंक्तियों में इस प्रकार खड़ा किया गया है कि प्रत्येक पंक्ति में बराबर संख्या में छात्र खड़े हैं। यदि प्रत्येक पंक्ति में एक छात्र बढ़ा दें, तो दो पंक्तियाँ कम हो जाएँगी। जबकि प्रत्येक पंक्ति से एक छात्र कम कर दें, तो 3 पंक्तियाँ बढ़ जाएँगी। कक्षा में विद्यार्थियों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।

हल माना प्रत्येक पंक्ति में छात्र x

तथा पंक्तियों की कुल संख्या y

विद्यार्थियों की कुल संख्या xy

प्रथम प्रतिबन्ध से, $(x \quad 1)(y \quad 2) \quad xy$

[∵ विद्यार्थियों की संख्या सदैव समान होगी]

$$xy \quad 2x \quad y \quad 2 \quad xy$$

$$2x \quad y \quad 2 \qquad \ldots(i)$$

द्वितीय प्रतिबन्ध से, $(x \quad 1)(y \quad 3) \quad xy$

$$xy \quad 3x \quad y \quad 3 \quad xy$$

$$3x \quad y \quad 3 \qquad \ldots(ii)$$

समी (i) तथा (ii) को जोड़ने पर, $\qquad x \quad 5$

x का मान समी (i) में रखने पर,

$$2(5) \quad y \quad 2 \qquad y \quad 2 \quad 10 \quad 12$$

अत: विद्यार्थियों की कुल संख्या xy

$$(5)(12) \quad 60$$

7. दो पाइपों को एकसाथ प्रयोग करने पर एक स्वीमिंग पुल को भरने में लिया गया समय 12 घण्टे है। यदि बड़े व्यास वाला पाइप 4 घण्टे तथा छोटे व्यास वाला पाइप 9 घण्टे में केवल पुल का $\frac{1}{2}$ भाग भरते हैं, तब प्रत्येक पाइप द्वारा अलग-अलग पुल को भरने में लिया गया समय ज्ञात कीजिए।

हल माना बड़े व्यास वाला पाइप पुल को x घण्टे में तथा छोटे व्यास वाला पाइप y घण्टे में भरेगा।

प्रथम प्रतिबन्ध से, $\frac{1}{x} \quad \frac{1}{y} \quad \frac{1}{12} \qquad \ldots(i)$

द्वितीय प्रतिबन्ध से, $\frac{4}{x} \quad \frac{9}{y} \quad \frac{1}{2} \qquad \ldots(ii)$

माना $\frac{1}{x} \quad u$ तथा $\frac{1}{y} \quad v$

तब, $\qquad u \quad v \quad \frac{1}{12} \qquad \ldots(iii)$

$$4u \quad 9v \quad \frac{1}{2} \qquad \ldots(iv)$$

समी (iii) में 9 से गुणा करके इसमें से समी (iv) को घटाने पर,

$$5u \quad \frac{9}{12} \quad \frac{1}{2}$$

$$5u \quad \frac{9 \quad 6}{12}$$

$$5u \quad \frac{3}{12} \qquad u \quad \frac{1}{20}$$

u का मान समी (iii) में रखने पर,

$$\frac{1}{20} \quad v \quad \frac{1}{12}$$

$$v \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{20}$$

$$v \quad \frac{5 \quad 3}{60} \qquad v \quad \frac{2}{60} \quad \frac{1}{30}$$

अब, $\qquad u \quad \frac{1}{20}$ तथा $v \quad \frac{1}{30}$

$$\frac{1}{x} \quad \frac{1}{20} \text{ तथा } \frac{1}{y} \quad \frac{1}{30}$$

$$x \quad 20 \text{ तथा } y \quad 30$$

अत: बड़े व्यास वाला पाइप पुल को 20 घण्टे तथा छोटे व्यास वाला पाइप 30 घण्टे में भरेगा।

❐❐❐

4

द्विघात समीकरण

प्रश्नावली 4.1

1. निम्नलिखित समीकरणों को मानक रूप में लिखिए।

(i) $9x^2$ 10 (ii) $7x$ $9x^2$

(iii) $6x$ x^2 0 (iv) x^2 $7x$

(v) $6x^2$ 10

हल (i) दी गई समीकरण $9x^2$ 10 का मानक रूप $9x^2$ $0x$ 10 0 है।

(ii) दी गई समीकरण $7x$ $9x^2$ का मानक रूप $9x^2$ $7x$ 0 0 है।

(iii) दी गई समीकरण $6x$ x^2 0 का मानक रूप x^2 $6x$ 0 0 है।

(iv) दी गई समीकरण x^2 $7x$ का मानक रूप x^2 $7x$ 0 0 है।

(v) दी गई समीकरण $6x^2$ 10 का मानक रूप $6x^2$ $0x$ 10 0 है।

21. निम्नलिखित समीकरणों को मानक रूप में लिखिए।

(i) $9x$ $6x^2$ 1 0 (ii) $5x^2$ $4x$ 1

(iii) $4y^2$ 3 $7y$ (iv) $9y^2$ $6y$ 1

हल (i) दी गई समीकरण $9x$ $6x^2$ 1 0 का मानक रूप $6x^2$ $9x$ 1 0 है।

(ii) दी गई समीकरण $5x^2$ $4x$ 1 का मानक रूप $5x^2$ $4x$ 1 0 है।

(iii) दी गई समीकरण $4y^2$ 3 $7y$ का मानक रूप $4y^2$ $7y$ 3 0 है।

(iv) दी गई समीकरण $9y^2$ $6y$ 1 का मानक रूप $9y^2$ $6y$ 1 0 है।

3. जाँच कीजिए कि क्या निम्नलिखित समीकरणें द्विघात समीकरण हैं?

(i) $4x$ 10 x^2 0 (ii) $3x$ 8 0

(iii) $5x^2$ 9 (iv) $3x^2$ $7x$ 11

(v) $7\sqrt{2}\,x^2$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 0

हल (i) ∵ दी गई समीकरण $4x$ 10 x^2 0 का मानक रूप x^2 $4x$ 10 0 द्विघात समीकरण ax^2 bx c 0 के रूप का है।

यह द्विघात समीकरण है।

(ii) ∵ दी गई समीकरण $3x$ 8 0 की अधिकतम घात 1 है। अत: द्विघात समीकरण नहीं है।

(iii) ∵ दी गई समीकरण $5x^2$ 9 का मानक रूप $5x^2$ $0x$ 9 0, द्विघात समीकरण के रूप का है।

यह द्विघात समीकरण है।

(iv) ∵ दी गई समीकरण $3x^2$ $7x$ 11 का मानक रूप $3x^2$ $7x$ 11 0 द्विघात समीकरण के रूप का है।

यह द्विघात समीकरण है।

(v) ∵ दी गई समीकरण $7\sqrt{2}\,x^2$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 0 का मानक रूप $14x^2$ $0x$ 1 0, द्विघात समीकरण के रूप का है।

यह द्विघात समीकरण है।

4. जाँच कीजिए कि समीकरण $(x$ 2$)(x$ 1$)$ $(x$ 1$)(x$ 3$)$ द्विघात समीकरण है या नहीं।

हल *नहीं*, दी गई समीकरण $(x$ 2$)$ $(x$ 1$)$ $(x$ 1$)(x$ 3$)$ को मानक रूप में बनाने पर,

$$x^2 \quad x \quad 2x \quad 2 \quad x^2 \quad 3x \quad x \quad 3$$

$$x^2 \quad x \quad 2 \quad x^2 \quad 2x \quad 3$$

$$x^2 \quad x \quad 2 \quad x^2 \quad 2x \quad 3 \quad 0$$

$$0x^2 \quad 3x \quad 1 \quad 0$$

में x^2 का गुणांक शून्य है।

अत: यह द्विघात समीकरण नहीं है।

5. जाँच कीजिए कि क्या निम्नलिखित समीकरण द्विघात समीकरण हैं?

(i) $(y$ 1$)^2$ 3$(y$ 1$)$ (ii) $(z$ 5$)^2$ 2$(z$ 2$)$

हल (i) *हाँ*, दी गई समीकरण $(y$ 1$)^2$ 3$(y$ 1$)$ को मानक रूप में लिखने पर,

$$y^2 \quad 1 \quad 2y \quad 3y \quad 3$$

$$y^2 \quad 1 \quad 2y \quad 3y \quad 3 \quad 0$$

$$y^2 \quad y \quad 2 \quad 0$$

जोकि द्विघात समीकरण के रूप की है।

(ii) *हाँ*, दी गई समीकरण $(z$ 5$)^2$ 2$(z$ 2$)$ को मानक रूप में लिखने पर,

$$z^2 \quad 25 \quad 10z \quad 2z \quad 4$$

$$z^2 \quad 25 \quad 10z \quad 2z \quad 4 \quad 0$$

$z^2 \quad 8z \quad 21 \quad 0$

जोकि द्विघात समीकरण के रूप की है।

6. जाँच कीजिए कि समीकरण $y \quad \frac{1}{y} \quad 7$ एक द्विघात समीकरण है या नहीं।

हल *हाँ,* दी गई समीकरण $y \quad \frac{1}{y} \quad 7$ को मानक रूप में बनाने पर,

$$y^2 \quad 1 \quad 7y$$
$$y^2 \quad 7y \quad 1 \quad 0$$

जोकि द्विघात समीकरण के रूप की है।

7. सिद्ध कीजिए कि $9x^2 \quad 9x \quad 7 \quad 7x^2 \quad 9x \quad 9$ एक द्विघात समीकरण है।

हल दी गई समीकरण $9x^2 \quad 9x \quad 7 \quad 7x^2 \quad 9x \quad 9$ को मानक रूप में लिखने पर,

$$9x^2 \quad 9x \quad 7 \quad 7x^2 \quad 9x \quad 9 \quad 0$$
$$2x^2 \quad 2 \quad 0$$
$$x^2 \quad 1 \quad 0 \quad \text{[2 से भाग देने पर]}$$

यह समीकरण द्विघात समीकरण है क्योंकि चर x की अधिकतम घात 2 है।

8. समीकरण $9x^2 \quad \frac{1}{\sqrt{3}}x \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad 0, \quad 5x^2 \quad 25, \quad 3x^2 \quad 7x \quad 11 \quad 0$ और $\sqrt{2}x^2 \quad \sqrt{3}x \quad \sqrt{7} \quad 0$ सभी द्विघात समीकरणें हैं, परन्तु $x \quad 9 \quad 0$ द्विघात समीकरण नहीं है। क्यों?

हल यहाँ समीकरण $x \quad 9 \quad 0, ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ के रूप में नहीं है।

अत: यह द्विघात समीकरण नहीं है।

प्रश्नावली 4.2

1. यदि समीकरण $2x^2 \quad px \quad 4 \quad 0$ का एक मूल 2 है, तो p का मान होगा

(a) 3 (b) 2

(c) 2 (d) 4

हल (*b*) दी गई समीकरण $2x^2 \quad px \quad 4 \quad 0$ का मूल 2 है।

$x \quad 2$ समीकरण में रखने पर,

$$2(2)^2 \quad p(2) \quad 4 \quad 0$$
$$8 \quad 2p \quad 4 \quad 0$$
$$2p \quad 4 \quad 0$$
$$2p \quad 4$$
$$p \quad \frac{4}{2} \quad 2$$

2. यदि समीकरण $2x^2 \quad 3x \quad m \quad 0$ का एक मूल 1 है, तो m का मान होगा

(a) 1 (b) 1

(c) 2 (d) 2

हल (*a*) $\because$ दी गई समीकरण $2x^2 \quad 3x \quad m \quad 0$ का एक मूल 1 है।

तब, $x \quad 1$ समीकरण को सन्तुष्ट करेगा।

$$2(\ 1)^2 \quad 3(\ 1) \quad m \quad 0$$
$$2 \quad 3 \quad m \quad 0$$
$$1 \quad m \quad 0$$
$$m \quad 1$$

3. द्विघात समीकरण $14x^2 \quad x \quad 3 \quad 0$ का एक मूल होगा

(a) 0 (b) $\frac{1}{2}$

(c) 2 (d) 143

हल (*b*) दी गई समीकरण, $14x^2 \quad x \quad 3 \quad 0$

$$14x^2 \quad 7x \quad 6x \quad 3 \quad 0 \quad \text{[मध्य पद को विभक्त करने पर]}$$
$$7x(2x \quad 1) \quad 3(2x \quad 1) \quad 0$$
$$(7x \quad 3)(2x \quad 1) \quad 0$$

जब $7x \quad 3 \quad 0$ तथा $2x \quad 1 \quad 0$

$$7x \quad 3 \text{ तथा } x \quad 1$$
$$x \quad \frac{3}{7} \text{ तथा } x \quad \frac{1}{2}$$

अत: $x \quad \frac{1}{2}$ समीकरण का एक मूल है।

4. समीकरण $x^2 \quad 2x \quad 8 \quad 0$ के मूल होंगे

(a) 2, 4 (b) 2, 4

(c) 2,8 (d) 4, 2

हल (*d*) दी गई समीकरण, $x^2 \quad 2x \quad 8 \quad 0$

$$x^2 \quad 4x \quad 2x \quad 8 \quad 0$$
$$x(x \quad 4) \quad 2(x \quad 4) \quad 0$$
$$(x \quad 4)(x \quad 2) \quad 0$$

जब $x \quad 4 \quad 0$ तथा $x \quad 2 \quad 0$

$$x \quad 4 \text{ तथा } x \quad 2$$

अत: $x \quad 2, 4$ समीकरण के मूल हैं।

5. निम्नलिखित में से प्रत्येक में ज्ञात कीजिए कि दिए गए मान द्विघात समीकरण के हल हैं या नहीं।

(i) $x \quad 2, 4x^2 \quad 6x \quad 9 \quad 0$

(ii) $y \quad \frac{3}{4}, y^2 \quad y \quad 4 \quad 0$

(iii) $x \quad \frac{2}{3}, 6x^2 \quad x \quad 2 \quad 0$

(iv) $x \quad 2, 2x^2 \quad 7x \quad 7x \quad 6 \quad 0$

(v) $x \quad \frac{5}{4}, x^2 \quad 4x \quad 5 \quad 0$

(vi) $x \quad 1, x^2 \quad 6x \quad 5 \quad 0$

हल (i) *नहीं,* $x \quad 2$, समीकरण $4x^2 \quad 6x \quad 9 \quad 0$ में रखने पर,

बायाँ पक्ष $4(\ 2)^2 \quad 6(\ 2) \quad 9$

$16 \quad 12 \quad 9 \quad 37$

0 (दायाँ पक्ष)

अत: $x \quad 2$ समीकरण का हल नहीं है।

(ii) *नहीं,* $y \quad \frac{3}{4}$, समीकरण $y^2 \quad y \quad 4 \quad 0$ में रखने पर,

बायाँ पक्ष $\quad \frac{3}{4}^{\ 2} \quad \frac{3}{4} \quad 4$

$$\frac{9}{16} \quad \frac{3}{4} \quad 4$$

$$\frac{9 \quad 12 \quad 64}{16} \quad \frac{85}{16}$$

0 (दायाँ पक्ष)

अत: $y \quad \frac{3}{4}$, समीकरण का हल नहीं है।

(iii) *हाँ,* $x \quad \frac{2}{3}$, समीकरण $6x^2 \quad x \quad 2 \quad 0$ में रखने पर,

बायाँ पक्ष $\quad 6 \ \frac{2}{3}^{\ 2} \quad \frac{2}{3} \quad 2$

$$6 \quad \frac{4}{9} \quad \frac{2}{3} \quad 2$$

$$\frac{24 \quad 6 \quad 18}{9}$$

$$\frac{24 \quad 24}{9}$$

0 (दायाँ पक्ष)

अत: $x \quad \frac{2}{3}$ समीकरण का हल है।

(iv) *हाँ,* $x \quad 2$, समीकरण $2x^2 \quad 7x \quad 6 \quad 0$ में रखने पर, बायाँ पक्ष

$2(2)^2 \quad 7(2) \quad 6$

$8 \quad 14 \quad 6$

$14 \quad 14$

0 (दायाँ पक्ष)

अत: $x \quad 2$, समीकरण का हल है।

(v) *नहीं,* $x \quad \frac{5}{4}$, समीकरण $x^2 \quad 4x \quad 5 \quad 0$ में रखने पर,

बायाँ पक्ष $\quad \frac{5}{4}^{\ 2} \quad 4 \ \frac{5}{4} \quad 5$

$$\frac{25}{16} \quad 5 \quad 5$$

$$\frac{25 \quad 160}{16}$$

$$\frac{135}{16}$$

0 (दायाँ पक्ष)

अत: $x \quad \frac{5}{4}$ समीकरण का हल नहीं है।

(vi) *हाँ,* $x \quad 1$, समीकरण $x^2 \quad 6x \quad 5 \quad 0$ में रखने पर,

बायाँ पक्ष $\quad (\ 1)^2 \quad 6(\ 1) \quad 5$

$1 \quad 6 \quad 5$

$6 \quad 6$

0 (दायाँ पक्ष)

अत: $x \quad 1$ समीकरण का हल है।

6. सिद्ध कीजिए कि $(b \quad c)x^2 \quad (a \quad c)x \quad (a \quad b) \quad 0$ **का एक मूल** 1 **है।**

हल $x \quad 1$, समीकरण $(b \quad c)x^2 \quad (a \quad c)x \quad (a \quad b) \quad 0$ में रखने पर,

बायाँ पक्ष $\quad (b \quad c)(\ 1)^2 \quad (a \quad c)(\ 1) \quad (a \quad b)$

$b \quad c \quad a \quad c \quad a \quad b$

0 (दायाँ पक्ष)

अत: $x \quad 1$ समीकरण का हल है।

7. द्विघात समीकरण $9x^2 \quad ax \quad 12 \quad 0$ **में** a **का मान ज्ञात कीजिए, यदि** $x \quad 1$ **समीकरण का एक मूल है।**

हल $x \quad 1$, समीकरण $9x^2 \quad ax \quad 12 \quad 0$ में रखने पर,

$9(1)^2 \quad a(1) \quad 12 \quad 0$

$9 \quad a \quad 12 \quad 0$

$a \quad 3 \quad 0$

$a \quad 3$

8. यदि समी $3y^2 \quad 2ky \quad 3 \quad 0$ **का एक मूल** $\frac{1}{2}$ **है, तो** k **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल समीकरण $3y^2 \quad 2ky \quad 3 \quad 0$ का एक मूल $\frac{1}{2}$ है।

$y \quad \frac{1}{2}$ रखने पर,

$$3 \ \frac{1}{2}^{\ 2} \quad 2k \ \frac{1}{2} \quad 3 \quad 0$$

$$\frac{3}{4} \quad k \quad 3 \quad 0$$

$$k \quad \frac{3}{4} \quad 3$$

$$k \quad \frac{3 \quad 12}{4}$$

$k \quad \frac{9}{4}$

$k \quad -\frac{9}{4}$

9. यदि समीकरण $3y^2 \quad 2my \quad 2m \quad 0$ का एक मूल 2 है, तो m का मान ज्ञात कीजिए।

हल दी गई समीकरण $3y^2 \quad 2my \quad 2m \quad 0$ का एक मूल 2 है।

$y \quad 2$ समीकरण में रखने पर,

$3(2)^2 \quad 2m(2) \quad 2m \quad 0$

$12 \quad 4m \quad 2m \quad 0$

$2m \quad 12$

$m \quad \frac{12}{2}$

$m \quad 6$

10. यदि समीकरण $x^2 \quad 3mx \quad 9n \quad 0$ के दो मूल 6 और 12 हों, तो m और n के मान क्या होंगे?

हल समीकरण $x^2 \quad 3mx \quad 9n \quad 0$ के मूल 6 और 12 हैं।

$x \quad 6$ रखने पर,

$36 \quad 3m\,(6) \quad 9n \quad 0$

$36 \quad 18m \quad 9n \quad 0$

$18m \quad 9n \quad 36$

$2m \quad n \quad 4$ ...(i)

[9 से भाग देने पर]

पुन: $x \quad 12$ समीकरण में रखने पर,

$(12)^2 \quad 3m(12) \quad 9n \quad 0$

$144 \quad 36m \quad 9n \quad 0$

$36m \quad 9n \quad 144$

$4m \quad n \quad 16$ ...(ii)

[9 से भाग देने पर]

अब, समी (i) में से समी (ii) को घटाने पर,

$2m \quad 12$

$m \quad \frac{12}{2} \quad 6$

m का मान समी (i) में रखने पर,

$2(6) \quad n \quad 4$

$12 \quad n \quad 4$

$n \quad 4 \quad 12 \quad 8$

अत: $m \quad 6$ तथा $n \quad 8$ है।

11. निम्नलिखित द्विघात समीकरणों को गुणनखण्ड विधि द्वारा हल कीजिए।

(i) $x^2 \quad 4 \quad 0$ (ii) $x^2 \quad 16 \quad 0$

(iii) $x^2 \quad 3x \quad 10 \quad 0$ (iv) $x^2 \quad 6x \quad 16 \quad 0$

(v) $\frac{x}{5} \quad \frac{5}{x}$ (vi) $\sqrt{2}x^2 \quad 7x \quad 5\sqrt{2} \quad 0$

(vii) $y^2 \quad 2\sqrt{3}y \quad 3 \quad 0$

(viii) $x^2 \quad \frac{17}{4}x \quad 1 \quad 0$

(ix) $2x^2 \quad mx \quad m^2 \quad 0$

(x) $pqx^2 \quad (2pr \quad q^2)\,x \quad 2qr \quad 0$

(xi) $\frac{1}{x \quad 4} \quad \frac{1}{x \quad 7} \quad \frac{11}{30}; x \quad 4, \quad 7$

हल (i) $\because \quad x^2 \quad 4 \quad 0$

$(x)^2 \quad (2)^2 \quad 0$

$(x \quad 2)(x \quad 2) \quad 0 \quad [\because a^2 \quad b^2 \quad (a \quad b)(a \quad b)]$

जब $x \quad 2 \quad 0$ तथा $x \quad 2 \quad 0$

$x \quad 2$ तथा $x \quad 2$

अत: x के अभीष्ट मान 2 तथा 2 हैं।

(ii) $\because \quad x^2 \quad 16 \quad 0$

$(x)^2 \quad (4)^2 \quad 0$

$(x \quad 4)(x \quad 4) \quad 0$

जब $x \quad 4 \quad 0$ तथा $x \quad 4 \quad 0$

$x \quad 4$ तथा $x \quad 4$

अत: x के अभीष्ट मान 4 तथा 4 हैं।

(iii) $\because \quad x^2 \quad 3x \quad 10 \quad 0$

$x^2 \quad 5x \quad 2x \quad 10 \quad 0$

[मध्य पद को विभक्त करने पर]

$x^2(x \quad 5) \quad 2(x \quad 5) \quad 0$

$(x \quad 5)(x \quad 2) \quad 0$

जब $x \quad 5 \quad 0$ तथा $x \quad 2 \quad 0$

$x \quad 5$ तथा $x \quad 2$

अत: x के अभीष्ट मान 5 तथा 2 हैं।

(iv) $\because \quad x^2 \quad 6x \quad 16 \quad 0$

$x^2 \quad (8 \quad 2)x \quad 16 \quad 0$

$x^2 \quad 8x \quad 2x \quad 16 \quad 0$

$x(x \quad 8) \quad 2(x \quad 8) \quad 0$

$(x \quad 8)(x \quad 2) \quad 0$

जब $x \quad 8 \quad 0$ तथा $x \quad 2 \quad 0$

$x \quad 8$ तथा $x \quad 2$

अत: x के अभीष्ट मान 8 तथा 2 हैं।

(v) $\because \quad \frac{x}{5} \quad \frac{5}{x}$

$x^2 \quad 25$

$x^2 \quad 25 \quad 0$

$(x)^2 \quad (5)^2 \quad 0$

$(x \quad 5)(x \quad 5) \quad 0$

जब $x \quad 5 \quad 0$ तथा $x \quad 5 \quad 0$

$x \quad 5$ तथा $x \quad 5$

अत: x के अभीष्ट मान 5 तथा $\quad 5$ हैं।

(vi) $\because \quad \sqrt{2}x^2 \quad 7x \quad 5\sqrt{2} \quad 0$

$\sqrt{2}x^2 \quad (2 \quad 5)x \quad 5\sqrt{2} \quad 0$

$\sqrt{2}x^2 \quad 2x \quad 5x \quad 5\sqrt{2} \quad 0$

$\sqrt{2}x(x \quad \sqrt{2}) \quad 5(x \quad \sqrt{2}) \quad 0$

$(x \quad \sqrt{2})(\sqrt{2}x \quad 5) \quad 0$

जब $\quad x \quad \sqrt{2} \quad 0$

तथा $\quad \sqrt{2}x \quad 5 \quad 0$

$x \quad \sqrt{2}$ तथा $x \quad \frac{5}{\sqrt{2}}$

अत: x के अभीष्ट मान $\sqrt{2}$ तथा $\frac{5}{\sqrt{2}}$ हैं।

(vii) $\because \quad y^2 \quad 2\sqrt{3}y \quad 3 \quad 0$

$y^2 \quad (\sqrt{3} \quad \sqrt{3})y \quad 3 \quad 0$

$y^2 \quad \sqrt{3}y \quad \sqrt{3}y \quad 3) \quad 0$

$y(y \quad \sqrt{3}) \quad \sqrt{3}(y \quad \sqrt{3} \quad 0$

$(y \quad \sqrt{3})(y \quad \sqrt{3}) \quad 0$

जब $y \quad \sqrt{3} \quad 0$ तथा $y \quad \sqrt{3} \quad 0$

$y \quad \sqrt{3}$ तथा $y \quad \sqrt{3}$

अत: y के अभीष्ट मान $\sqrt{3}$ व $\sqrt{3}$ हैं।

(viii) $\because \quad x^2 \quad \frac{17}{4}x \quad 1 \quad 0$

$4x^2 \quad 17x \quad 4 \quad 0$ [4 से गुणा करने पर]

$4x^2 \quad (16 \quad 1)x \quad 4 \quad 0$

$4x^2 \quad 16x \quad x \quad 4 \quad 0$

$4x(x \quad 4) \quad 1(x \quad 4) \quad 0$

$(x \quad 4)(4x \quad 1) \quad 0$

जब, $x \quad 4 \quad 0$ तथा $4x \quad 1 \quad 0$

$x \quad 4$ तथा $x \quad \frac{1}{4}$

अत: x के अभीष्ट मान 4 तथा $1/4$ हैं।

(ix) $\because \quad 2x^2 \quad mx \quad m^2 \quad 0$

$2x^2 \quad (2m \quad m)x \quad m^2 \quad 0$

$2x^2 \quad 2mx \quad mx \quad m^2 \quad 0$

$2x(x \quad m) \quad m(x \quad m) \quad 0$

$(x \quad m)(2x \quad m) \quad 0$

जब, $x \quad m \quad 0$ तथा $2x \quad m \quad 0$

$x \quad m$ तथा $x \quad \frac{m}{2}$

अत: x के अभीष्ट मान $\quad m$ तथा $\frac{m}{2}$ हैं।

(x) $\because \quad pqx^2 \quad (2pr \quad q^2)x \quad 2qr \quad 0$

$pqx^2 \quad 2prx \quad q^2x \quad 2qr \quad 0$

$px(qx \quad 2r) \quad q(qx \quad 2r) \quad 0$

$(qx \quad 2r)(px \quad q) \quad 0$

जब, $qx \quad 2r \quad 0$ तथा $px \quad q \quad 0$

$qx \quad 2r$ तथा $px \quad q$

$x \quad \frac{2r}{q}$ तथा $x \quad \frac{q}{p}$

अत: x के अभीष्ट मान $\quad \frac{2r}{q}$ तथा $\frac{q}{p}$ हैं।

(xi) $\because \quad \frac{1}{x \quad 4} \quad \frac{1}{x \quad 7} \quad \frac{11}{30}; x \quad 4, \quad 7$

$\frac{x \quad 7 \quad x \quad 4}{(x \quad 4)(x \quad 7)} \quad \frac{11}{30}$

$\frac{11}{(x \quad 4)(x \quad 7)} \quad \frac{11}{30}$

$11(x^2 \quad 7x \quad 4x \quad 28) \quad 11 \quad 30$

$x^2 \quad 3x \quad 28 \quad 30$

$x^2 \quad 3x \quad 28 \quad 30 \quad 0$

$x^2 \quad 3x \quad 2 \quad 0$

$x^2 \quad (2 \quad 1)x \quad 2 \quad 0$

$x^2 \quad 2x \quad x \quad 2 \quad 0$

$x(x \quad 2) \quad 1(x \quad 2) \quad 0$

$(x \quad 2)(x \quad 1) \quad 0$

जब $x \quad 2 \quad 0$ तथा $x \quad 1 \quad 0$

$x \quad 2$ तथा $x \quad 1$

अत: x के अभीष्ट मान 2 तथा 1 हैं।

12. निम्नलिखित द्विघात समीकरणों को द्विघातीय विधि द्वारा हल कीजिए।

(i) $3x^2 \quad 8x \quad 4 \quad 0$ (ii) $4x^2 \quad 2x \quad \frac{1}{4} \quad 0$

(iii) $4x^2 \quad 4\sqrt{3}x \quad 3 \quad 0$

(iv) $\frac{3}{4}y^2 \quad 8y \quad 3 \quad 0$ (v) $x^2 \quad 5x \quad 5 \quad 0$

(vi) $6x^2 \quad 7x \quad 2 \quad 0$

(vii) $x \quad \frac{1}{x} \quad 3, x \quad 0$

हल

(i) समीकरण $3x^2 \quad 8x \quad 4 \quad 0$ की तुलना $ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ से करने पर, $a \quad 3, b \quad 8, c \quad 4$

श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x \quad \frac{b \quad \sqrt{b^2 \quad 4ac}}{2a}$$

$$\frac{(\ 8) \quad \sqrt{(\ 8)^2 \quad 4 \quad 3 \quad 4}}{2 \quad 3}$$

$$\frac{8 \quad \sqrt{64 \quad 48}}{6}$$

$$\frac{8 \quad \sqrt{16}}{6} \quad \frac{8 \quad 4}{6}$$

धनात्मक चिह्न लेने पर,

$$x \quad \frac{8 \quad 4}{6} \quad \frac{12}{6} \quad 2$$

ऋणात्मक चिह्न लेने पर,

$$x \quad \frac{8 \quad 4}{6} \quad \frac{4}{6} \quad \frac{2}{3}$$

अत: x के अभीष्ट मान 2 तथा $\frac{2}{3}$ हैं।

(ii) $\because \quad 4x^2 \quad 2x \quad \frac{1}{4} \quad 0$

$$16x^2 \quad 8x \quad 1 \quad 0$$

की तुलना समीकरण $ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ से करने पर,

$a \quad 16, b \quad 8, c \quad 1$

श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x \quad \frac{b \quad \sqrt{b^2 \quad 4ac}}{2a}$$

$$\frac{(\ 8) \quad \sqrt{(\ 8)^2 \quad 4 \quad 16 \quad 1}}{2 \quad 16}$$

$$\frac{8 \quad \sqrt{64 \quad 64}}{32}$$

$$\frac{8}{32} \quad \frac{1}{4}$$

अत: x के अभीष्ट मान $\frac{1}{4}$ तथा $\frac{1}{4}$ हैं।

(iii) $4x^2 \quad 4\sqrt{3}x \quad 3 \quad 0$ की तुलना $ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ से करने पर,

$a \quad 4, b \quad 4\sqrt{3}, c \quad 3$

श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x \quad \frac{b \quad \sqrt{b^2 \quad 4ac}}{2a}$$

$$\frac{4\sqrt{3} \quad \sqrt{(4\sqrt{3})^2 \quad 4 \quad 4 \quad 3}}{2 \quad 4}$$

$$\frac{4\sqrt{3} \quad \sqrt{(48 \quad 48)}}{8}$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{8} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$$

अत: x के अभीष्ट मान $\frac{\sqrt{3}}{2}$ तथा $\frac{\sqrt{3}}{2}$ हैं।

(iv) $\because \quad \frac{3}{4}y^2 \quad 8y \quad 3 \quad 0$

$$3y^2 \quad 32y \quad 12 \quad 0$$

की तुलना $ay^2 \quad by \quad c \quad 0$ से करने पर,

$a \quad 3, b \quad 32, c \quad 12$

श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$y \quad \frac{b \quad \sqrt{b^2 \quad 4ac}}{2a}$$

$$\frac{32 \quad \sqrt{(\ 32)^2 \quad 4 \quad 3 \quad 12}}{2 \quad 3}$$

$$\frac{32 \quad \sqrt{1024 \quad 144}}{6} \quad \frac{32 \quad \sqrt{880}}{6}$$

$$\frac{32 \quad 4\sqrt{55}}{6} \quad \frac{2(16 \quad 2\sqrt{55})}{6}$$

$$\frac{16 \quad 2\sqrt{55}}{3}$$

अत: x के अभीष्ट मान $\frac{16 \quad 2\sqrt{55}}{3}$ तथा $\frac{16 \quad 2\sqrt{55}}{3}$ हैं।

(v) $x^2 \quad 5x \quad 5 \quad 0$

की तुलना $ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ से करने पर,

$a \quad 1, b \quad 5, c \quad 5$

श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x \quad \frac{b \quad \sqrt{b^2 \quad 4ac}}{2a}$$

$$\frac{5 \quad \sqrt{(5)^2 \quad 4 \quad 1 \quad 5}}{2 \quad 1}$$

$$\frac{5 \quad \sqrt{25 \quad 20}}{2} \quad \frac{5 \quad \sqrt{5}}{2}$$

अत: x के अभीष्ट मान $\frac{5 \quad \sqrt{5}}{2}$ तथा $\frac{5 \quad \sqrt{5}}{2}$ हैं।

(vi) $6x^2 \quad 7x \quad 2 \quad 0$ की $ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ से तुलना करने पर,

$a \quad 6, b \quad 7, c \quad 2$

श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x \quad \frac{b \quad \sqrt{b^2 \quad 4ac}}{2a}$$

$$\frac{(\ 7) \quad \sqrt{(\ 7)^2 \quad 4 \quad 6 \quad 2}}{2 \quad 6}$$

$$\frac{7 \quad \sqrt{49 \quad 48}}{12} \quad \frac{7 \quad \sqrt{1}}{12} \quad \frac{7 \quad 1}{12}$$

धनात्मक चिह्न लेने पर, $x \quad \frac{7 \quad 1}{12} \quad \frac{8}{12} \quad \frac{2}{3}$

ऋणात्मक चिह्न लेने पर,

$$x \quad \frac{7 \quad 1}{12} \quad \frac{6}{12} \quad \frac{1}{2}$$

अत: x के अभीष्ट मान $\frac{2}{3}$ तथा $\frac{1}{2}$ हैं।

(vii) $\because x \quad \frac{1}{x} \quad 3, x \quad 0$

$$x^2 \quad 1 \quad 3x$$

$$x^2 \quad 3x \quad 1 \quad 0$$

की तुलना $ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ से करने पर,

$$a \quad 1, b \quad 3, c \quad 1$$

श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x \quad \frac{b \quad \sqrt{b^2 \quad 4ac}}{2a}$$

$$\frac{(\ 3) \quad \sqrt{(\ 3)^2 \quad 4(1)(\ 1)}}{2 \quad 1}$$

$$\frac{3 \quad \sqrt{9 \quad 4}}{2} \quad \frac{3 \quad \sqrt{13}}{2}$$

अत: x के अभीष्ट मान $\frac{3 \quad \sqrt{13}}{2}$ तथा $\frac{3 \quad \sqrt{13}}{2}$ हैं।

प्रश्नावली 4.3

1. समीकरण $ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ के सम्बन्ध में अशुद्ध कथन है

(a) $b^2 \quad 4ac \quad 0$; समीकरण के मूल वास्तविक नहीं होंगे

(b) $b^2 \quad 4ac \quad 0$; समीकरण के मूल वास्तविक तथा असमान होंगे

(c) $b^2 \quad 4ac \quad 0$; समीकरण के मूल वास्तविक तथा समान होंगे

(d) $b^2 \quad 4ac$ पूर्ण वर्ग; समीकरण के मूल अपरिमेय होंगे

हल (*d*) कथन (d) अशुद्ध है, क्योंकि जब $b^2 \quad 4ac \quad 0$ पूर्ण वर्ग है, तब मूल परिमेय होंगे।

2. द्विघात समीकरण $3x^2 \quad 4x \quad 5 \quad 0$ का विविक्तकर है

(a) 89 (b) 76 (c) 71 (d) 13

हल (*b*) दी गई समीकरण $3x^2 \quad 4x \quad 5 \quad 0$ की तुलना $ax^2 \quad bx \quad 5 \quad 0$ से करने पर,

$$a \quad 3, b \quad 4, c \quad 5$$

विविक्तकर, $D \quad b^2 \quad 4ac$

$$(4)^2 \quad (4)(3)(\ 5)$$

$$16 \quad 60 \quad 76$$

अत: अभीष्ट विविक्तकर 76 है।

3. निम्नलिखित द्विघात समीकरण का विविक्तकर ज्ञात कीजिए।

(i) $3x^2 \quad 8x \quad 4 \quad 0$ (ii) $2x^2 \quad 11x \quad 15 \quad 0$

(iii) $3x^2 \quad 4\sqrt{3}\,x \quad 4 \quad 0$ (iv) $2x^2 \quad 4x \quad 8 \quad 0$

हल (i) समीकरण $3x^2 \quad 8x \quad 4 \quad 0$ की तुलना $ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ से करने पर,

$$a \quad 3, b \quad 8, c \quad 4$$

विविक्तकर, $D \quad b^2 \quad 4ac$

$$(8)^2 \quad 4(3)(4)$$

$$64 \quad 48 \quad 16$$

(ii) समीकरण $2x^2 \quad 11x \quad 15 \quad 0$ की तुलना $ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ से करने पर,

$$a \quad 2, b \quad 11, c \quad 15$$

विविक्तकर, $D \quad b^2 \quad 4ac$

$$(11)^2 \quad 4 \quad 2 \quad 15$$

$$121 \quad 120 \quad 1$$

(iii) समीकरण $3x^2 \quad 4\sqrt{3}x \quad 4 \quad 0$ की तुलना $ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ से करने पर,

$$a \quad 3, b \quad 4\sqrt{3}, c \quad 4$$

विविक्तकर, $D \quad b^2 \quad 4ac$

$$(\ 4\sqrt{3})^2 \quad 4 \quad (3) \quad (\ 4)$$

$$48 \quad 48 \quad 96$$

(iv) समीकरण $2x^2 \quad 4x \quad 8 \quad 0$ की तुलना $ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ से करने पर,

$$a \quad 2, b \quad 4, c \quad 8$$

विविक्तकर, $D \quad b^2 \quad 4ac$

$$(4)^2 \quad 4(2)(\ 8)$$

$$16 \quad 64 \quad 80$$

(v) समीकरण $9y^2 \quad 2y \quad 7 \quad 0$ की तुलना $ay^2 \quad by \quad c \quad 0$ से करने पर,

$$a \quad 9, b \quad 2, c \quad 7$$

विविक्तकर, $D \quad b^2 \quad 4ac$

$$(\ 2)^2 \quad 4(9)(\ 7)$$

$$4 \quad 252 \quad 256$$

4. समीकरण $8x^2 \quad kx \quad 4 \quad 0$ का विविक्तकर शून्य है। उसके मूलों की प्रकृति तथा k का मान ज्ञात कीजिए।

हल समीकरण $8x^2 \quad kx \quad 4 \quad 0$ की तुलना $ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ से करने पर,

$a \quad 8, b \quad k, c \quad 4$

प्रश्नानुसार, विविक्तकर, $D \quad 0$

इसलिए मूल वास्तविक, अपरिमेय और असमान होंगे।

अब, $b^2 \quad 4ac \quad 0$

$(\quad k)^2 \quad 4(8)(4) \quad 0$

$k^2 \quad 128 \quad 0$

$k^2 \quad 128$

$k \quad 8\sqrt{2}$

5. यदि समीकरण $3x^2 \quad 4x \quad a \quad 0$ का विविक्तकर 88 है, तो a का मान ज्ञात कीजिए।

हल समीकरण $3x^2 \quad 4x \quad a \quad 0$ की तुलना$ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ से करने पर,

$a \quad 3, b \quad 4, c \quad a$

$\because$ विविक्तकर, $D \quad 88$

$b^2 \quad 4ac \quad 88$

$(\quad 4)^2 \quad 4(3)(a) \quad 88$

$16 \quad 12a \quad 88$

$12a \quad 88 \quad 16$

$12a \quad 72$

$a \quad \frac{72}{12} \quad 6$

6. यदि समीकरण $ax^2 \quad 8x \quad a \quad 0$ के मूल बराबर हैं, तो a का मान ज्ञात कीजिए।

हल समीकरण $ax^2 \quad 8x \quad a \quad 0$ की $ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ से तुलना करने पर,

$a \quad a, b \quad 8, c \quad a$

$\because$ दी गई समीकरण के मूल बराबर हैं।

$D \quad 0$

$b^2 \quad 4ac \quad 0$

$(\quad 8)^2 \quad 4(a)(a) \quad 0$

$64 \quad 4a^2 \quad 0$

$4a^2 \quad 64$

$a^2 \quad \frac{64}{4} \quad 16$

$a \quad \sqrt{16} \quad 4$

7. निम्नलिखित द्विघात समीकरणों के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

(i) $2x^2 \quad 6x \quad 3 \quad 0$ (ii) $3x^2 \quad 2x \quad 1 \quad 0$

(iii) $8x^2 \quad 2x \quad 3 \quad 0$ (iv) $x^2 \quad x \quad 1 \quad 0$

हल (i) समीकरण $2x^2 \quad 6x \quad 3 \quad 0$ की तुलना $ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ से करने पर,

$a \quad 2, b \quad 6, c \quad 3$

अब, $D \quad b^2 \quad 4ac$

$(\quad 6)^2 \quad 4(2)(3)$

$36 \quad 24 \quad 12$

$\because \quad D \quad 0$

समीकरण के मूल वास्तविक, अपरिमेय और असमान होंगे।

(ii) समीकरण $3x^2 \quad 2x \quad 1 \quad 0$ की तुलना $ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ से करने पर,

$a \quad 3, b \quad 2, c \quad 1$

अब, $D \quad b^2 \quad 4ac$

$(2)^2 \quad 4(3)(\quad 1)$

$4 \quad 12 \quad 16$

$\because D \quad 0$ तथा पूर्ण वर्ग है।

मूल वास्तविक, असमान और परिमेय होंगे।

(iii) समीकरण $8x^2 \quad 2x \quad 3 \quad 0$ की तुलना $ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ से करने पर,

$a \quad 8, b \quad 2, c \quad 3$

अब, $D \quad b^2 \quad 4ac$

$(2)^2 \quad 4(8)(\quad 3)$

$4 \quad 96 \quad 100$

$\because \quad D \quad 0$ तथा पूर्ण वर्ग है।

मूल वास्तविक, असमान और परिमेय होंगे।

(iv) समीकरण $x^2 \quad x \quad 1 \quad 0$ की तुलना $ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ से करने पर,

$a \quad 1, b \quad 1, c \quad 1$

अब, $D \quad b^2 \quad 4ac$

$(\quad 1)^2 \quad 4(1)(1) \quad 1 \quad 4 \quad 3$

$\because \quad D \quad 0$

मूल काल्पनिक हैं।

8. सिद्ध कीजिए की समीकरण $x^2 \quad 3x \quad 4 \quad 0$ के मूल वास्तविक नहीं हैं।

हल समीकरण $x^2 \quad 3x \quad 4 \quad 0$ की तुलना $ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ से तुलना करने पर,

$a \quad 1, b \quad 3, c \quad 4$

अब, $D \quad b^2 \quad 4ac$

$(\quad 3)^2 \quad 4(1)(4) \quad 9 \quad 16 \quad 7$

$\because \quad D \quad 0$

मूल वास्तविक नहीं होंगे।

9. सिद्ध कीजिए कि समीकरण $\frac{3}{4}x^2 \quad 8x \quad 3 \quad 0$ के दो वास्तविक मूल हैं तथा इन मूलों को ज्ञात कीजिए।

हल समीकरण $\frac{3}{4}x^2 \quad 8x \quad 3 \quad 0$

$3x^2 \quad 32x \quad 12 \quad 0$ की तुलना $ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ से करने पर,

$a \quad 3, b \quad 32, c \quad 12$

अब, $D \quad b^2 \quad 4ac$

$(\quad 32)^2 \quad 4 \quad 3 \quad 12$

$1024 \quad 144 \quad 880$

$\because \quad D \quad 0$

मूल वास्तविक होंगे।

श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x \quad \frac{b \quad \sqrt{b^2 \quad 4ac}}{2a}$$

$$\frac{(\quad 32) \quad \sqrt{880}}{2 \quad 3} \quad \frac{32 \quad 4\sqrt{55}}{2 \quad 3}$$

$$\frac{2(16 \quad 2\sqrt{55})}{2 \quad 3} \quad \frac{16 \quad 2\sqrt{55}}{3}$$

10. k का वह मान ज्ञात कीजिए, जिसके लिए द्विघात समीकरण $2kx^2 \quad 8x \quad k \quad 0$ के मूल बराबर हैं।

हल समीकरण $2kx^2 \quad 8x \quad k \quad 0$ की तुलना $ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ से करने पर

$a \quad 2k, b \quad 8, c \quad k$

प्रश्नानुसार, मूल बराबर हैं।

$D \quad 0$

$b^2 \quad 4ac \quad 0$

$(\quad 8)^2 \quad 4(2k)(k) \quad 0$

$64 \quad 8k^2 \quad 0$

$8k^2 \quad 64$

$k^2 \quad \frac{64}{8} \quad 8$

$k \quad 2\sqrt{2}$

11. निम्नलिखित द्विघात समीकरणों में k का ऐसा मान ज्ञात कीजिए कि उसके दो मूल बराबर हों।

(i) $2x^2 \quad kx \quad 3 \quad 0$ (ii) $kx(x \quad 2) \quad 6 \quad 0$

हल (i) समीकरण $2x^2 \quad kx \quad 3 \quad 0$ की $ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ से तुलना करने पर,

$a \quad 2, b \quad k, c \quad 3$

$\because$ मूल बराबर हैं।

$D \quad 0$

$b^2 \quad 4ac \quad 0$

$(k)^2 \quad 4(2)(3) \quad 0$

$k^2 \quad 24 \quad 0$

$k^2 \quad 24$

$k \quad \sqrt{24}$

$k \quad 2\sqrt{6}$

(ii) समीकरण $kx(x \quad 2) \quad 6 \quad 0$

$kx^2 \quad 2kx \quad 6 \quad 0$

की तुलना $ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$ से करने पर,

$a \quad k, b \quad 2k, c \quad 6$

$\because$ मूल बराबर हैं।

$D \quad 0$

$b^2 \quad 4ac \quad 0$

$(\quad 2k)^2 \quad 4(k)(6) \quad 0$

$4k^2 \quad 24k \quad 0$

$4k(k \quad 6) \quad 0$

$k \quad 6$

12. यदि समीकरण $2x^2 \quad kx \quad 4 \quad 0$ का एक मूल 2 है, तो k का मान तथा समीकरण का दूसरा मूल ज्ञात कीजिए।

हल समीकरण $2x^2 \quad kx \quad 4 \quad 0$ का एक मूल 2 है।

$x \quad 2$ समीकरण को सन्तुष्ट करेगा।

$2(2)^2 \quad k(2) \quad 4 \quad 0$

$8 \quad 2k \quad 4 \quad 0$

$2k \quad 12$

$k \quad \frac{12}{2}$

$k \quad 6$

अब, $2x^2 \quad 6x \quad 4 \quad 0$ [k का मान रखने पर]

$2x^2 \quad 4x \quad 2x \quad 4 \quad 0$

$2x(x \quad 2) \quad 2(x \quad 2) \quad 0$

$(x \quad 2)(2x \quad 2) \quad 0$

जब $x \quad 2 \quad 0$

तथा $2x \quad 2 \quad 0$

$x \quad 2$ तथा $x \quad 1$

अत: $k \quad 6$ तथा दूसरा मूल 1 है।

प्रश्नावली 4.4

1. एक संख्या तथा उसके व्युत्क्रम को योगफल $2\frac{9}{10}$ है। संख्या ज्ञात कीजिए।

हल माना संख्या x है।

प्रश्नानुसार, $x + \frac{1}{x} = 2\frac{9}{10}$

$$\frac{x^2 + 1}{x} = \frac{29}{10}$$

$$10x^2 + 10 = 29x$$

$$10x^2 - 29x + 10 = 0$$

$$10x^2 - (25 - 4)x + 10 = 0$$

$$10x^2 - 25x - 4x + 10 = 0$$

$$5x(2x - 5) - 2(2x - 5) = 0$$

$$(2x - 5)(5x - 2) = 0$$

जब $2x - 5 = 0$ तथा $5x - 2 = 0$

$$x = \frac{5}{2} \text{ तथा } x = \frac{2}{5}$$

अत: अभीष्ट संख्या $\frac{5}{2}$ या $\frac{2}{5}$ है।

2. एक संख्या तथा उसके व्युत्क्रम का योगफल $\frac{17}{4}$ है। संख्या ज्ञात कीजिए।

हल माना संख्या x है।

प्रश्नानुसार, $x + \frac{1}{x} = \frac{17}{4}$

$$\frac{x^2 + 1}{x} = \frac{17}{4}$$

$$4x^2 + 4 = 17x$$

$$4x^2 - 17x + 4 = 0$$

$$4x^2 - (16 - 1)x + 4 = 0$$

$$4x^2 - 16x - x + 4 = 0$$

$$4x(x - 4) - 1(x - 4) = 0$$

$$(x - 4)(4x - 1) = 0$$

जब $x - 4 = 0$ तथा $4x - 1 = 0$

$$x = 4 \text{ तथा } x = \frac{1}{4}$$

अत: अभीष्ट संख्या 4 या $\frac{1}{4}$ है।

3. एक संख्या तथा उसके व्युत्क्रम का योगफल 2 है। संख्या ज्ञात कीजिए।

हल माना संख्या x है।

प्रश्नानुसार, $x + \frac{1}{x} = 2$ $\qquad \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{2}{1}$

$$x^2 + 1 = 2x \qquad x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0 \qquad (x - 1)(x - 1) = 0$$

जब, $x - 1 = 0$ $\qquad x = 1$

अत: अभीष्ट संख्या 1 है।

4. ऐसी दो प्राकृतिक संख्याएँ ज्ञात कीजिए, जिनका योगफल 15 तथा गुणनफलन 56 है।

हल माना दो संख्याएँ x तथा y हैं।

प्रश्नानुसार, $x + y = 15$ ...(i)

तथा $xy = 56$ ...(ii)

समी (i) से $y = 15 - x$ समी (ii) में रखने पर,

$$x(15 - x) = 56$$

$$15x - x^2 = 56$$

$$x^2 - 15x + 56 = 0$$

$$x^2 - (8 + 7)x + 56 = 0$$

$$x^2 - 8x - 7x + 56 = 0$$

$$x(x - 8) - 7(x - 8) = 0$$

$$(x - 8)(x - 7) = 0$$

जब $x - 8 = 0$ तथा $x - 7 = 0$

$$x = 8 \text{ तथा } x = 7$$

समी (ii) से, जब $x = 8$, तब $y = 7$

जब $x = 7$, तब $y = 8$

अत: अभीष्ट संख्याएँ 7 तथा 8 हैं।

5. ऐसी दो प्राकृतिक संख्याएँ ज्ञात कीजिए, जिनका योगफल 25 तथा गुणनफल 156 हैं।

हल माना संख्याएँ x तथा y हैं।

प्रश्नानुसार, $x + y = 25$ ...(i)

तथा $xy = 156$ ....(ii)

समी (i) से $y = 25 - x$ समी (ii) में रखने पर,

$$x(25 - x) = 156$$

$$25x - x^2 = 156$$

$$x^2 - 25x + 156 = 0$$

$$x^2 - (13 + 12)x + 156 = 0$$

$$x^2 - 13x - 12x + 156 = 0$$

$$x(x - 13) - 12(x - 13) = 0$$

$$(x - 13)(x - 12) = 0$$

जब $x - 13 = 0$ तथा $x - 12 = 0$

$$x = 13 \text{ तथा } x = 12$$

समी (ii) से, जब $x = 13$, तब $y = 12$

तथा $x = 12$, तब $y = 13$

अत: अभीष्ट संख्याएँ 12 तथा 13 हैं।

6. दो क्रमागत प्राकृतिक संख्याएँ ज्ञात कीजिए, जिनके वर्गों का योगफल 421 है।

हल माना दो क्रमागत संख्याएँ x तथा $x + 1$ हैं।

प्रश्नानुसार, $(x)^2 + (x + 1)^2 = 421$

$$x^2 \quad x^2 \quad 1 \quad 2x \quad 421 \quad 0$$
$$2x^2 \quad 2x \quad 420 \quad 0$$
$$x^2 \quad x \quad 210 \quad 0 \quad \text{[2 से भाग देने पर]}$$
$$x^2 \quad (15 \quad 14)\,x \quad 210 \quad 0$$
$$x^2 \quad 15x \quad 14x \quad 210 \quad 0$$
$$x(x \quad 15) \quad 14\,(x \quad 15) \quad 0$$
$$(x \quad 15)\,(x \quad 14) \quad 0$$

जब $x \quad 15 \quad 0$ तथा $x \quad 14 \quad 0$

$x \quad 15$ (अमान्य है) तथा $x \quad 14$

अत: अभीष्ट क्रमागत संख्याएँ 14 तथा 15 हैं।

7. हंसों के एक झुण्ड में से उनकी संख्या के वर्गमूल के $\frac{7}{2}$ गुने तालाब के किनारे खेल रहे हैं और बचे हुए 2 पानी पर तैर रहे हैं। हंसों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल माना हंसों की संख्या x^2

प्रश्नानुसार, $\frac{7}{2}\sqrt{x^2} \quad 2 \quad x^2$

$$\frac{7}{2}x \quad 2 \quad x^2$$
$$7x \quad 4 \quad 2x^2$$
$$2x^2 \quad 7x \quad 4 \quad 0$$
$$2x^2 \quad (8 \quad 1)\,x \quad 4 \quad 0$$
$$2x^2 \quad 8x \quad x \quad 4 \quad 0$$
$$2x\,(x \quad 4) \quad 1\,(x \quad 4) \quad 0$$
$$(x \quad 4)\,(2x \quad 1) \quad 0$$

जब $x \quad 4 \quad 0$ तथा $2x \quad 1 \quad 0$

$x \quad 4$ तथा $x \quad \frac{1}{2}$ (अमान्य)

हंसों की संख्या $x^2 \quad (4)^2 \quad 16$

8. दो क्रमागत धन सम संख्याएँ ज्ञात कीजिए, जिनके वर्गों का योगफल 340 है।

हल माना दो क्रमागत धन सम संख्याएँ $2x$ तथा $2x \quad 2$ हैं।

प्रश्नानुसार, $(2x)^2 \quad (2x \quad 2)^2 \quad 340$

$$4x^2 \quad 4x^2 \quad 4 \quad 8x \quad 340 \quad 0$$
$$8x^2 \quad 8x \quad 336 \quad 0$$
$$x^2 \quad x \quad 42 \quad 0 \quad \text{[8 से भाग देने पर]}$$
$$x^2 \quad (7 \quad 6)\,x \quad 42 \quad 0$$
$$x^2 \quad 7x \quad 6x \quad 42 \quad 0$$
$$x(x \quad 7) \quad 6(x \quad 7) \quad 7$$
$$(x \quad 6)\,(x \quad 7) \quad 0$$

जब $x \quad 6 \quad 0$ तथा $x \quad 7 \quad 0$

$x \quad 6$ तथा $x \quad 7$ (अमान्य)

संख्याएँ $2(6) \quad 12$ तथा $2(6) \quad 2 \quad 14$

अत: अभीष्ट संख्याएँ 12 तथा 14 हैं।

9. एक रेलगाड़ी एकसमान चाल से 360 किमी की दूरी तय करती है। यदि यह चाल 5 किमी/घण्टा अधिक होगी, तो वह उसी यात्रा में 1 घण्टा कम समय लेगी। रेलगाड़ी की चाल ज्ञात कीजिए।

हल माना रेलगाड़ी की चाल x किमी/घण्टा

प्रथम स्थिति में लगा समय $\frac{360}{x}$ घण्टे

द्वितीय स्थिति में लगा समय $\frac{360}{x \quad 5}$ घण्टे

प्रश्नानुसार, $\frac{360}{x} \quad \frac{360}{x \quad 5} \quad 1$

$$\frac{360\,x \quad 1800 \quad 360x}{x\,(x \quad 5)} \quad 1$$
$$1800 \quad x\,(x \quad 5)$$
$$x^2 \quad 5x \quad 1800 \quad 0$$
$$x^2 \quad (45 \quad 40)\,x \quad 1800 \quad 0$$
$$x^2 \quad 45x \quad 40x \quad 1800 \quad 0$$
$$x\,(x \quad 45) \quad 40\,(x \quad 45) \quad 0$$
$$(x \quad 45)\,(x \quad 40) \quad 0$$

जब $x \quad 45 \quad 0$ तथा $x \quad 40 \quad 0$

$x \quad 45$ (अमान्य) तथा $x \quad 40$

अत: रेलगाड़ी की चाल 40 किमी/घण्टा है।

10. एक समकोण त्रिभुज की ऊँचाई इसके आधार से 7 सेमी कम है। यदि कर्ण की लम्बाई 13 सेमी हो, तो अन्य दो भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

हल माना समकोण त्रिभुज का आधार x सेमी

तथा ऊँचाई (या लम्ब) y सेमी

प्रश्नानुसार, $y \quad x \quad 7$ ...(i)

तथा कर्ण 13

$$(\text{कर्ण})^2 \quad 169$$
$$(\text{आधार})^2 \quad (\text{लम्ब})^2 \quad 169$$
$$[\because (\text{कर्ण})^2 \quad (\text{लम्ब})^2 \quad (\text{आधार})^2]$$
$$x^2 \quad y^2 \quad 169$$
$$x^2 \quad (x \quad 7)^2 \quad 169 \quad \text{[समी (i) से]}$$
$$x^2 \quad x^2 \quad 49 \quad 14x \quad 169$$
$$2x^2 \quad 14x \quad 49 \quad 169 \quad 0$$
$$2x^2 \quad 14x \quad 120 \quad 0$$
$$x^2 \quad 7x \quad 60 \quad 0 \quad \text{[2 से भाग देने पर]}$$
$$x^2 \quad (12 \quad 5)\,x \quad 60 \quad 0$$

$x^2 \quad 12x \quad 5x \quad 60 \quad 0$

$x(x \quad 12) \quad 5(x \quad 12) \quad 0$

$(x \quad 12)(x \quad 5) \quad 0$

जब $x \quad 12 \quad 0$ तथा $x \quad 5 \quad 0$

$x \quad 12$ तथा $x \quad 5$ (अमान्य)

समी (i) से, $y \quad 12 \quad 7 \quad 5$

त्रिभुज का आधार 12 सेमी तथा ऊँचाई 5 सेमी

11. एक समकोण त्रिभुज का कर्ण 17 सेमी तथा अन्य दो भुजाओं का अन्तर 7 सेमी है। त्रिभुज की दोनों अज्ञात भुजाओं की माप ज्ञात कीजिए।

हल माना समकोण त्रिभुज की दो अज्ञात भुजाएँ x तथा y हैं।

प्रश्नानुसार, $x \quad y \quad 7 \quad y \quad x \quad 7$ ...(i)

तथा कर्ण $17 \quad$ (कर्ण) $\quad (17)^2$

$x^2 \quad y^2 \quad 289$

[$\because$ (कर्ण)^2 अन्य दो भुजाओं के वर्गों का योग]

$x^2 \quad (x \quad 7)^2 \quad 289$ [समी (i) से]

$x^2 \quad x^2 \quad 49 \quad 14x \quad 289 \quad 0$

$2x^2 \quad 14x \quad 240 \quad 0$

$x^2 \quad 7x \quad 120 \quad 0$

$x^2 \quad (15 \quad 8)x \quad 120 \quad 0$

$x^2 \quad 15x \quad 8x \quad 120 \quad 0$

$x(x \quad 15) \quad 8(x \quad 15) \quad 0$

$(x \quad 15)(x \quad 8) \quad 0$

जब $x \quad 15 \quad 0$ तथा $x \quad 8 \quad 0$

$x \quad 15$ तथा $x \quad 8$ (अमान्य)

$y \quad 15 \quad 7 \quad 8$

अत: त्रिभुज की अन्य दो भुजाएँ 15 तथा 8 हैं।

12. दो अंकों की संख्या के अंकों का गुणनफल 18 है। जब संख्या में से 27 घटाया जाता है, तो संख्या के अंकों के स्थान बदल जाते हैं। संख्या ज्ञात कीजिए।

हल माना संख्या के दहाई का अंक x

तथा इकाई का अंक y

मूल संख्या $10x \quad y$

प्रश्नानुसार, $xy \quad 18$ ...(i)

तथा $10x \quad y \quad 27 \quad 10y \quad x$

$10x \quad y \quad 27 \quad 10y \quad x \quad 0$

$9x \quad 9y \quad 27 \quad 0$

$x \quad y \quad 3 \quad 0$ [9 से भाग देने पर]

$y \quad x \quad 3$

y का मान समी (i) में रखने पर, $x(x \quad 3) \quad 18$

$x^2 \quad 3x \quad 18 \quad 0$

$x^2 \quad (6 \quad 3)x \quad 18 \quad 0$

$x^2 \quad 6x \quad 3x \quad 18 \quad 0$

$x(x \quad 6) \quad 3(x \quad 6) \quad 0$

$(x \quad 6)(x \quad 3) \quad 0$

जब $x \quad 6 \quad 0$ तथा $x \quad 3 \quad 0$

$x \quad 6$ तथा $x \quad 3$ (अमान्य)

जब $x \quad 6$, तब $y \quad 6 \quad 3 \quad 3$

मूल संख्या $60 \quad 3 \quad 63$

13. एक वस्तु को ₹ 39 में बेचने पर व्यापरी को उतने ही प्रतिशत लाभ होता है, जितना उसका क्रय मूल्य था। वस्तु का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल माना वस्तु का क्रय मूल्य x, लाभ % x

अब, विक्रय मूल्य $\quad$ क्रय मूल्य $\quad \frac{(100 \quad \text{लाभ}\%)}{100}$

$39 \quad x\frac{(100 \quad x)}{100}$

$3900 \quad 100x \quad x^2$

$x^2 \quad 100x \quad 3900 \quad 0$

$x^2 \quad (130 \quad 30)x \quad 3900 \quad 0$

$x^2 \quad 130x \quad 30x \quad 3900 \quad 0$

$x(x \quad 130) \quad 30(x \quad 130) \quad 0$

$(x \quad 130)(x \quad 30) \quad 0$

जब $x \quad 130 \quad 0$ तथा $x \quad 30 \quad 0$

$x \quad 130$ (अमान्य) तथा $x \quad 30$

अत: वस्तु का क्रय मूल्य ₹ 30 है।

14. एक व्यक्ति को कोई वस्तु ₹ 96 में बेचने पर उनते ही प्रतिशत लाभ होता है जितना उस वस्तु का क्रय मूल्य है। वस्तु का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल माना वस्तु का क्रय मूल्य ₹ x, तब लाभ% x

अब, विक्रय मूल्य $\quad$ क्रय मूल्य $\quad \frac{(100 \quad \text{लाभ}\%)}{100}$

$96 \quad x\frac{(100 \quad x)}{100}$

$9600 \quad 100x \quad x^2$

$x^2 \quad 100x \quad 9600 \quad 0$

$x^2 \quad (160 \quad 60)x \quad 9600 \quad 0$

$x^2 \quad 160x \quad 60x \quad 9600 \quad 0$

$x(x \quad 160) \quad 60(x \quad 160) \quad 0$

$(x \quad 160)(x \quad 60) \quad 0$

जब, $x \quad 160 \quad 0$ तथा $x \quad 60 \quad 0$

$x \quad 160$ (अमान्य)

तथा $\quad x \quad 60$

अत: वस्तु का क्रय मूल्य ₹ 60 है।

15. एक संख्या तथा उसके वर्गमूल का योगफल 132 है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।

हल माना संख्या x^2 है।

प्रश्नानुसार, $x^2 \quad \sqrt{x^2} \quad 132$

$x^2 \quad x \quad 132 \quad 0$

$x^2 \quad (12 \quad 11)\,x \quad 132 \quad 0$

$x^2 \quad 12x \quad 11x \quad 132 \quad 0$

$x(x \quad 12) \quad 11(x \quad 12) \quad 0$

$(x \quad 11)\,(x \quad 12) \quad 0$

जब $x \quad 11 \quad 0$ तथा $x \quad 12 \quad 0$

$x \quad 11$ तथा $x \quad 12$ (अमान्य)

संख्या $(x)^2 \quad (11)^2 \quad 121$

अत: अभीष्ट संख्या 121 है।

16. एक आयताकार मैदान की लम्बाई उसकी चौड़ाई के दोगुने से 10 मी कम है। मैदान का क्षेत्रफल 1000 वर्ग मी है। मैदान की लम्बाई तथा चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

हल माना मैदान की लम्बाई x मी तथा चौड़ाई y मी

प्रश्नानुसार, $x \quad 2y \quad 10$ ...(i)

तथा मैदान का क्षेत्रफल 1000

$xy \quad 1000$ [$\because$ क्षेत्रफल लम्बाई चौड़ाई]

$(2y \quad 10)y \quad 1000$ [समी (i) से]

$2y^2 \quad 10y \quad 1000 \quad 0$

$y^2 \quad 5y \quad 500 \quad 0$ [2 से भाग देने पर]

$y^2 \quad (25 \quad 20)\,y \quad 500 \quad 0$

$y^2 \quad 25y \quad 20y \quad 500 \quad 0$

$y\,(y \quad 25) \quad 20\,(y \quad 25) \quad 0$

$(y \quad 25)\,(y \quad 20) \quad 0$

जब $y \quad 25 \quad 0$ तथा $y \quad 20 \quad 0$

$y \quad 25$ तथा $y \quad 20$ (अमान्य)

जब $y \quad 25$, तब $x \quad 2(25) \quad 10$

$50 \quad 10 \quad 40$

अत: मैदान की लम्बाई 40 मी तथा चौड़ाई 25 मी है।

17. दो अंकों की एक संख्या के अंकों का गुणनफल 14 है। संख्या में 45 जोड़ने पर अंकों के स्थान परस्पर बदल जाते हैं। संख्या ज्ञात कीजिए।

हल माना दहाई का अंक x

तथा इकाई का अंक y

मूल संख्या $10x \quad y$

प्रश्नानुसार, $xy \quad 14$ ...(i)

तथा $10x \quad y \quad 45 \quad 10y \quad x$

$10x \quad y \quad 45 \quad 10y \quad x \quad 0$

$9x \quad 9y \quad 45 \quad 0$

$x \quad y \quad 5 \quad 0$ [9 से भाग देने पर]

$y \quad x \quad 5$

y का मान समी (i) में रखने पर,

$x\,(x \quad 5) \quad 14$

$x^2 \quad 5x \quad 14 \quad 0$

$x^2 \quad (7 \quad 2)\,x \quad 14 \quad 0$

$x^2 \quad 7x \quad 2x \quad 14 \quad 0$

$x\,(x \quad 7) \quad 2\,(x \quad 7) \quad 0$

$(x \quad 7)\,(x \quad 2) \quad 0$

जब, $x \quad 7 \quad 0 \quad x \quad 7$ (अमान्य)

तथा $x \quad 2 \quad 0 \quad x \quad 2$

जब $x \quad 2$, तब $y \quad 2 \quad 5 \quad 7$

संख्या $10(2) \quad 7 \quad 20 \quad 7 \quad 27$

18. दो अंकों की एक संख्या के अंकों का गुणनफल 18 है। जब संख्या में से 63 घटाया जाता है, तो संख्या के अंकों के स्थान बदल जाते हैं। संख्या ज्ञात कीजिए।

हल माना दहाई का अंक x

तथा इकाई का अंक y

मूल संख्या $10x \quad y$

प्रश्नानुसार, $xy \quad 18$ ...(i)

तथा $10x \quad y \quad 63 \quad 10y \quad x$

$10x \quad y \quad 63 \quad 10y \quad x \quad 0$

$9x \quad 9y \quad 63 \quad 0$

$x \quad y \quad 7 \quad 0$ [9 से भाग देने पर]

$y \quad x \quad 7$

y का मान समी (i) में रखने पर,

$x(x \quad 7) \quad 18$

$x^2 \quad 7x \quad 18 \quad 0$

$x^2\,(9 \quad 2)\,x \quad 18 \quad 0$

$x^2 \quad 9x \quad 2x \quad 18 \quad 0$

$x(x \quad 9) \quad 2(x \quad 9) \quad 0$

$(x \quad 9)\,(x \quad 2) \quad 0$

जब $x \quad 9 \quad 0$ तथा $x \quad 2 \quad 0$

$x \quad 9$ तथा $x \quad 2$ (अमान्य)

जब $x \quad 9$, तब $y \quad x \quad 7 \quad 9 \quad 7 \quad 2$

मूल संख्या $10\,(9) \quad 2 \quad 90 \quad 2 \quad 92$

❐❐❐

5

समांतर श्रेढ़ियाँ

प्रश्नावली 5.1

1. समान्तर श्रेढ़ी 5, 8, 11, 14 ... के प्रथम पद तथा सार्वान्तर ज्ञात कीजिए।

हल दी गई श्रेढ़ी में, a_1 5, a_2 8

प्रथम पद (a_1) 5,

सार्वान्तर (d) a_2 a_1 8 5 3

2. समान्तर श्रेढ़ी $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}$,... का सार्वान्तर ज्ञात कीजिए।

हल दी गई श्रेढ़ी में, a_1 $\sqrt{3}, a_2$ $2\sqrt{3}$

सार्वान्तर (d) a_2 a_1 $2\sqrt{3}$ $\sqrt{3}$ $\sqrt{3}$

3. जाँच कीजिए कि अनुक्रम 7, 13, 19, 25, ... समान्तर श्रेढ़ी में है या नहीं। इसका सार्वान्तर भी ज्ञात कीजिए।

हल दिए गए अनुक्रम में,

a_1 $7, a_2$ $13, a_3$ $19, a_4$ 25, ...

अब, a_2 a_1 13 7 6

a_3 a_2 19 13 6

a_4 a_3 25 19 6

$\because$ a_2 a_1 a_3 a_2 a_4 a_3 ... 6 [सार्वान्तर]

यह अनुक्रम समान्तर श्रेढ़ी है।

4. निम्न में से कौन-सा अनुक्रम समान्तर श्रेढ़ी में है? तर्क दीजिए।

(i) $1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots$

(ii) $\sqrt{3}, \sqrt{12}, \sqrt{27}, \sqrt{48}, \ldots$

(iii) $0.3, 0.33, 0.333, \ldots$

(iv) $4, 4$ $\sqrt{2}, 4$ $2\sqrt{2}, 4$ $3\sqrt{2}, \ldots$

हल (i) दिए गए अनुक्रम में,

a_1 $1, a_2$ $1, a_3$ $2, a_4$ $2, \ldots$

अब, a_2 a_1 1 1 0

तथा a_3 a_2 2 1 1

$\because$ a_2 a_1 a_3 a_2

यह अनुक्रम समान्तर श्रेढ़ी में नहीं है।

(ii) दिए गए अनुक्रम में,

a_1 $\sqrt{3}, a_2$ $\sqrt{12}, a_3$ $\sqrt{27}, a_4$ $\sqrt{48}$

अब, a_2 a_1 $\sqrt{12}$ $\sqrt{3}$ $2\sqrt{3}$ $\sqrt{3}$ $\sqrt{3}$

a_3 a_2 $\sqrt{27}$ $\sqrt{12}$

$3\sqrt{3}$ $2\sqrt{3}$ $\sqrt{3}$

तथा a_4 a_3 $\sqrt{48}$ $\sqrt{27}$ $4\sqrt{3}$ $3\sqrt{3}$ $\sqrt{3}$

$\because$ a_2 a_1 a_3 a_2

a_4 a_3 ... $\sqrt{3}$ [सार्वान्तर]

यह अनुक्रम समान्तर श्रेढ़ी में है।

(iii) दिए गए अनुक्रम में,

a_1 $0.3, a_2$ $0.33, a_3$ $0.333, \ldots$

अब, a_2 a_1 0.33 0.3 0.30

तथा a_3 a_2 0.333 0.33 .003

$\because$ a_2 a_1 a_3 a_2

यह अनुक्रम समान्तर श्रेढ़ी में नहीं है।

(iv) दिए गए अनुक्रम में, a_1 $4, a_2$ 4 $\sqrt{2}$,

a_3 4 $2\sqrt{2}, a_4$ 4 $3\sqrt{2}, \ldots$

अब, a_2 a_1 4 $\sqrt{2}$ 4 $\sqrt{2}$

a_3 a_2 4 $2\sqrt{2}$ 4 $\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$

तथा a_4 a_3 4 $3\sqrt{2}$ 4 $2\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$

$\because$ a_2 a_1 a_3 a_2 a_4 a_3 ...

$\sqrt{2}$ (सार्वान्तर)

यह अनुक्रम समान्तर श्रेढ़ी में है।

5. समान्तर श्रेढ़ी 6, 12, 18 ... का सार्वान्तर तथा अगले दो पद ज्ञात कीजिए।

हल दी गई समान्तर श्रेढ़ी में,

a_1 $6, a_2$ $12, a_3$ 18

सार्वान्तर (d) a_2 a_1 12 6 6

अब, a_4 a_3 d 18 6 24

a_5 a_4 d 24 6 30

अत: सार्वान्तर 6 तथा अगले दो पद 24 तथा 30 हैं।

6. एक समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम चार पद ज्ञात कीजिए जिसका प्रथम पद -2 तथा सार्वान्तर 2 है।

हल यहाँ, समान्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद (a_1) 2 तथा सार्वान्तर

(d) 2

प्रथम चार पद, a_1 2

a_2 a_1 d 2 2 4

a_3 a_2 d 4 2 6

तथा a_4 a_3 d 6 2 8

7. निम्न सूत्रों द्वारा परिभाषित संख्याओं की सूची के प्रथम चार पद ज्ञात कीजिए।

(i) $a_n = (-1)^{n-1} n^4$ (ii) $a_n = 2n - 3$

(iii) $a_n = n(n-1)$ (iv) $a_n = \frac{n^2}{n-2}$

(v) $a_n = 2^n$

हल (i) $a_n = (-1)^{n-1} n^4$ में $n = 1, 2, 3, 4$ रखने पर,

$a_1 = (-1)^{1-1}(1)^4 = (-1)^0 1 = 1 = 1 = 1$

$a_2 = (-1)^{2-1}(2)^4 = (-1)^1 (16) = -16$

$a_3 = (-1)^{3-1}(3)^4 = (-1)^2 81 = 81$

$a_4 = (-1)^{4-1}(4)^4 = (-1)^3 256 = -256$

अत: प्रथम चार पद $1, -16, 81, -256$ हैं।

(ii) $a_n = 2n - 3$ में $n = 1, 2, 3, 4$ रखने पर,

$a_1 = 2(1) - 3 = 2 - 3 = -1$

$a_2 = 2(2) - 3 = 4 - 3 = 1$

$a_3 = 2(3) - 3 = 6 - 3 = 3$

$a_4 = 2(4) - 3 = 8 - 3 = 11$

अत: प्रथम चार पद $-1, 1, 3, 11$ हैं।

(iii) $a_n = n(n-1)$ में $n = 1, 2, 3, 4$ रखने पर,

$a_1 = 1(1-1) = (1)(2) = 2$

$a_2 = 2(2-1) = (2)(3) = 6$

$a_3 = 3(3-1) = (3)(4) = 12$

$a_4 = 4(4-1) = (4)(5) = 20$

अत: प्रथम चार पद $2, 6, 12, 20$ हैं।

(iv) $a_n = \frac{n^2}{n-2}$ में $n = 1, 2, 3, 4$ रखने पर,

$a_1 = \frac{(1)^2}{1-2} = -\frac{1}{3}$

$a_2 = \frac{(2)^2}{2-2} = \frac{4}{4} = 1$

$a_3 = \frac{(3)^2}{3-2} = \frac{9}{5}$

$a_4 = \frac{(4)^2}{4-2} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$

अत: प्रथम चार पद $-\frac{1}{3}, 1, \frac{9}{5}, \frac{8}{3}$ हैं।

8. सिद्ध कीजिए कि $a_n = 3n^2 - 5$ द्वारा परिभाषित अनुक्रम समान्तर श्रेढ़ी में नहीं है।

हल दिया गया अनुक्रम, $a_n = 3n^2 - 5$

$n = 1$ रखने पर, $a_1 = 3(1)^2 - 5 = 3 - 5 = -2$

$n = 2$ रखने पर, $a_2 = 3(2)^2 - 5 = 12 - 5 = 7$

$n = 3$ रखने पर, $a_3 = 3(3)^2 - 5 = 27 - 5 = 22$

अब, $a_2 - a_1 = 7 - (-2) = 7 + 2 = 9$

तथा $a_3 - a_2 = 22 - 7 = 15$

$\because \quad a_3 - a_2 \neq a_2 - a_1$

अत: अनुक्रम समान्तर श्रेढ़ी में नहीं है।

9. सिद्ध कीजिए कि $a_n = 2n^2 - 1$ द्वारा परिभाषित अनुक्रम समान्तर श्रेढ़ी में नहीं हैं।

हल दिया गया अनुक्रम, $a_n = 2n^2 - 1$

$n = 1$ रखने पर,

$a_1 = 2(1)^2 - 1 = 2 - 1 = 1$

$n = 2$ रखने पर,

$a_2 = 2(2)^2 - 1 = 8 - 1 = 9$

$n = 3$ रखने पर,

$a_3 = 2(3)^2 - 1 = 18 - 1 = 19$

$\because \quad a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$

अत: यह अनुक्रम समान्तर श्रेढ़ी में नहीं है।

10. समान्तर श्रेढ़ी $a - b, a - 1 - b, (a - 1) - (b - 1), \ldots$ के अगले तीन पद ज्ञात कीजिए।

हल दी गई समान्तर श्रेढ़ी में,

$a_1 = a - b, a_2 = a - 1 - b,$

$a_3 = (a - 1) - (b - 1)$

सार्वान्तर, $d = a_2 - a_1$

$= a - 1 - b - a + b = -1$

अगले तीन पद, $a_4 = a_3 - d = (a - 1) - (b - 1) - 1$

$= (a - 2) - (b - 1)$

$a_5 = a_4 - d = (a - 2) - (b - 1) - 1$

$= (a - 2) - (b - 2)$

$a_6 = a_5 - d = (a - 2) - (b - 2) - 1$

$= (a - 3) - (b - 2)$

अत: अगले तीन पद $(a - 2) - (b - 1), (a - 2) - (b - 2), (a - 3) - (b - 2)$ हैं।

12. किसी अनुक्रम के संख्याओं की सूची निम्न सूत्रों द्वारा परिभाषित हो, तो जाँच कीजिए कि क्या श्रेणी समान्तर श्रेढ़ी है? तर्क दीजिए।

(i) $t_n = 5 - 6n$ (ii) $t_n = 3n - 2$

(iii) $t_n = 2n^2 - 1$ (iv) $t_n = 4n^3 - 3$

(v) $t_n = 9 - 11n^2$

हल (i) अनुक्रम के $t_n = 5 - 6n$ में $n = 1, 2, 3 \ldots$ रखने पर,

$t_1 = 5 - 6(1) = 5 - 6 = -1$

$t_2 = 5 - 6(2) = 5 - 12 = -17$

t_3 5 6(3) 5 18 23

$\because$ t_2 t_1 t_3 t_2 ... 6 (सार्वान्तर)

अत: अनुक्रम समान्तर श्रेढ़ी है।

(ii) अनुक्रम के t_n $3n$ 2 में n 1, 2, 3... रखने पर,

t_1 3(1) 2 3 2 1

t_2 3(2) 2 6 2 4

t_3 3(3) 2 9 2 7

$\because$ t_2 t_1 t_3 t_2 ... 3 (सार्वान्तर)

अत: अनुक्रम समान्तर श्रेढ़ी में है।

(iii) अनुक्रम के t_n $2n^2$ 1 में n 1, 2, 3 ... रखने पर,

t_1 $2(1)^2$ 1 2 1 3

t_2 $2(2)^2$ 1 8 1 9

t_3 $2(2)^3$ 1 16 1 17

$\because$ t_2 t_1 t_3 t_2

अत: अनुक्रम समान्तर श्रेढ़ी नहीं है।

(iv) अनुक्रम के t_n $4n^3$ 3 में n 1, 2, 3 ...रखने पर,

t_1 $4(1)^3$ 3 4 3 7

t_2 $4(2)^3$ 3 32 3 35

t_3 $4(3)^3$ 3 108 3 111

$\because$ t_2 t_1 t_3 t_2

अत: अनुक्रम समान्तर श्रेढ़ी नहीं है।

(v) अनुक्रम के t_n 9 $11n^2$ में n 1, 2, 3... रखने पर,

t_1 9 $11(1)^2$ 9 11 2

t_2 9 $11(2)^2$ 9 44 35

t_3 9 $11(3)^2$ 9 99 90

$\because$ t_2 t_1 t_3 t_2

अत: अनुक्रम समान्तर श्रेढ़ी में नहीं है।

12. निम्नलिखित स्थिति से प्राप्त अनुक्रम समान्तर श्रेढ़ी में है या नहीं जाँच कीजिए। ''प्रत्येक वर्ष खाते में प्राप्त राशियों की सूची, जब 100, 4% प्रतिवर्ष चक्रवृद्धि ब्याज की दर से जमा किया जाता है।''

हल पहले वर्ष खाते में जमा 100 a_1

दूसरे वर्ष खाते में जमा $100\ 1\ \frac{4}{100}^{\ 2}$ 104

a_2 $\because A$ $P\ 1\ \frac{r}{100}^{\ n}$

तीसरे वर्ष खाते में जमा $104\ 1\ \frac{4}{100}^{\ 1}$ 108.16 a_3

$\because$ a_2 a_1 a_3 a_2

अत: अनुक्रम समान्तर श्रेढ़ी में नहीं है।

प्रश्नावली 5.2

1. यदि d 4, n 7 तथा a_n 4 हो, तो a का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\because$ a_n a $(n\ 1)\,d$

4 a $(7\ 1)(\ 4)$

4 a 24

a 4 24 28

2. समान्तर श्रेढ़ी 5, $\frac{5}{2}$, 0, $\frac{5}{2}$ ... का 11 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल दी गई श्रेढ़ी का प्रथम पद,

a_1 5, a

सार्वान्तर (d) a_2 a_1 $\frac{5}{2}$ (5)

$\frac{5}{2}$ 5 $\frac{5}{2}$

11वाँ पद, a_{11} a_1 $(11\ 1)\,d$ [$\because a_n$ a $(n\ 1)\,d$]

5 10 $\frac{5}{2}$

5 25 20

अत: समान्तर श्रेढ़ी का 11वाँ पद 20 है।

3. किसी समान्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद 5, सार्वान्तर 3 तथा अन्तिम पद 80 हो, तो पदों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, a 5, d 3, l 80

माना पदों की संख्या n है।

$\because$ अन्तिम पद, l a $(n\ 1)\,d$

80 5 $(n\ 1)\,3$

80 5 $3n$ 3

80 2 $3n$

$3n$ 80 2 $3n$ 78

n $\frac{78}{3}$ 26

अत: पदों की संख्या 26 है।

4. जाँच कीजिए कि 0 समान्तर श्रेढ़ी 31, 28, 25, ... का एक पद है।

हल दी गई श्रेढ़ी में,

a 31, d 28 31 3

माना श्रेणी का nवाँ पद शून्य है।

a_n 0

a $(n\ 1)\,d$ 0 [$\because a_n$ a $(n\ 1)\,d$]

31 $(n\ 1)(\ 3)$ 0

31 $3n$ 3 0

$3n$ 34 0

$3n \quad 34$

$n \quad \frac{34}{3} \quad 11\frac{1}{3}$

$\because \quad n$ का मान पूर्णांक नहीं हैं

अत: 0 (शून्य) श्रेढ़ी का पद नहीं है।

5. यदि समान्तर श्रेढ़ी 25, 50, 75, 100, ... का p वाँ पद $x \quad 1000$ है, तो p का मान ज्ञात कीजिए।

हल दी गई श्रेढ़ी में,

$a \quad 25, d \quad 50 \quad 25 \quad 25$

$a_p \quad x \quad 1000$

सूत्र $a_n \quad a \quad (n \quad 1)\, d$ से,

$a_p \quad x \quad a \quad (p \quad 1)\, d$

$1000 \quad 25 \quad (p \quad 1)(25)$

$1000 \quad 25 \quad (p \quad 1)(25)$

$\frac{975}{25} \quad p \quad 1 \qquad 39 \quad p \quad 1$

$p \quad 39 \quad 1 \quad 40$

6. यदि एक समान्तर श्रेढ़ी का 11वाँ पद 80 तथा 16वाँ पद 110 है, तो 31वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल माना श्रेणी का प्रथम पद a

तथा सार्वान्तर d

दिया है, $a_{11} \quad 80, \; a_{16} \quad 110$

अब, $a_n \quad a \quad (n \quad 1)\, d$ से,

$a_{11} \quad a \quad (11 \quad 1)\, d$

$80 \quad a \quad 10d \qquad \ldots(i)$

तथा $a_{16} \quad a \quad (16 \quad 1)\, d$

$110 \quad a \quad 15\, d \qquad \ldots(ii)$

समी (i) में से समी (ii) को घटाने पर,

$30 \quad 5d$

$d \quad \frac{30}{5} \quad 6$

d का मान समी (i) में रखने पर,

$80 \quad a \quad 10(6)$

$a \quad 80 \quad 60 \quad 20$

अब, $a_{31} \quad a \quad (31 \quad 1)\, d \; [a_n \quad a \quad (n \quad 1)\, d$ से]

$20 \quad 30(6) \quad 20 \quad 180 \quad 200$

अत: 31वाँ पद 200 है।

7. समान्तर श्रेढ़ी 3, 8, 13, 18,... का कौन-सा पद इसके 31वें पद से 130 ज्यादा है?

हल दी गई श्रेणी में, $a \quad 3, d \quad 8 \quad 3 \quad 5$

$a_{31} \quad a \quad (31 \quad 1)\, d$

$[a_n \quad a \quad (n \quad 1)\, d$ से]

$3 \quad 30(5) \quad 3 \quad 150 \quad 153$

माना n वाँ पद 31 वें पद से 130 अधिक है।

$a_n \quad a_{31} \quad 130$

$a \quad (n \quad 1)\, d \quad 153 \quad 130 \qquad [a_{31}$ का मान रखने पर]

$3 \quad (n \quad 1)(5) \quad 283$

$3 \quad 5n \quad 5 \quad 283$

$5n \quad 2 \quad 283$

$5n \quad 283 \quad 2$

$5n \quad 285$

$n \quad \frac{285}{5} \quad 57$

अत: अभीष्ट पद 57वाँ है।

8. समान्तर श्रेढ़ी 17, 14, 11, (40) का अन्त से 6वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल दी गई श्रेणी में, $a \quad 17, d \quad 14 \quad 17 \quad 3, l \quad 40, n \quad 6$

$\because$ अन्त से nवाँ पद $l \quad (n \quad 1)\, d$

अन्त से 6वाँ पद $40 \quad (6 \quad 1)(\ 3)$

$40 \quad 15 \quad 25$

अत: अभीष्ट पद 25 है।

9. एक समान्तर श्रेढ़ी में, $a \quad 10, d \quad 5$ तथा $n \quad 100$ हो, तो a_{100} का मान ज्ञात कीजिए तथा समान्तर श्रेढ़ी में अन्त से 50 वाँ पद भी ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $a \quad 10, d \quad 5, n \quad 100$

$\because \quad a_n \quad a \quad (n \quad 1)\, d$

$a_{100} \quad 10 \quad (100 \quad 1)(5)$

$10 \quad (99)(5) \quad 10 \quad 495$

$505 \quad l \qquad$ [अन्तिम पद]

$\because$ अन्त से nवाँ पद $l \quad (n \quad 1)\, d$

अन्त से 50वाँ पद $505 \quad (50 \quad 1)(5)$

$505 \quad (49)(5)$

$505 \quad 245$

260

अत: $a_{100} \quad 505$ तथा अन्त से 50वाँ पद 260 है।

10. एक फुलवारी की, पहली पंक्ति में 43, दूसरी पंक्ति में 41, तीसरी पंक्ति में 39 इत्यादि गुलाब के पौधे हैं। यदि फुलवारी की आखिरी पंक्ति में 11 गुलाब के पौधे हैं, तो फुलवारी में पंक्तियों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।

हल प्रश्नानुसार, पौधों की संख्या की श्रेणी 43,41, 39,..., 11 हैं।

$a \quad 43, d \quad 41 \quad 43 \quad 2, l \quad 11$

माना पंक्तियों की संख्या $n \qquad$ [पदों की संख्या]

$\because \quad l \quad a \quad (n \quad 1)\, d$

$11 \quad 43 \quad (n \quad 1)(\ 2)$

$$11 \quad 43 \quad 2n \quad 2$$
$$11 \quad 45 \quad 2n$$
$$2n \quad 45 \quad 11$$
$$2n \quad 34$$
$$n \quad \frac{34}{2} \quad 17$$

अत: पंक्तियों की संख्या 17 है।

11. एक व्यक्ति ऋण का भुगतान ₹100 की प्रथम किस्त से शुरू करता है। यदि वह प्रत्येक किस्त में ₹5 प्रतिमाह बढ़ाता है, तो 30वीं किस्त की राशि क्या होगी?

हल दिया है, प्रथम किस्त $\quad 100$

या प्रथम पद, $\quad a \quad 100$

सार्वान्तर, $\quad d \quad 5, n \quad 30$ [किस्त की संख्या]

$\because \quad a_n \quad a \quad (n \quad 1)\, d$

$$a_{30} \quad 100 \quad (30 \quad 1)\, 5$$
$$100 \quad 29 \quad 5$$
$$100 \quad 145 \quad 245$$

अत: 30वीं किस्त ₹ 245 है।

12. 10 तथा 300 के बीच ऐसी कितनी संख्याएँ होंगी, जिनकों 4 से भाग देने पर शेषफल 3 आए?

हल 10 तथा 300 के बीच की ऐसी संख्याओं की श्रेणी, जिनको 4 से भाग देने पर शेषफल 3 आए, $11, 15, 19, 23, \ldots, 299$ होगी।

यहाँ, $a \quad 11, d \quad 4, l \quad 299$

माना पदों की संख्या n है।

$\because \quad l \quad a \quad (n \quad 1)\, d$

$$299 \quad 11 \quad (n \quad 1)\, 4$$
$$299 \quad 11 \quad 4n \quad 4$$
$$299 \quad 7 \quad 4n$$
$$4n \quad 299 \quad 7$$
$$4n \quad 292$$
$$n \quad \frac{292}{4} \quad 73$$

अत: अभीष्ट संख्याएँ 73 होंगी।

13. यदि 5000 की राशि को 8% वार्षिक ब्याज की दर से निवेश किया जाता है, तो प्रत्येक वर्ष के अन्त में ब्याज की गणना कीजिए। क्या प्रत्येक वर्ष के अन्त में प्राप्त ब्याज समान्तर श्रेढ़ी में है? 30 वर्ष के अन्त में प्राप्त ब्याज भी ज्ञात कीजिए।

हल पहले वर्ष के अन्त में ब्याज

$$\frac{\text{मूलधन} \quad \text{दर} \quad \text{समय}}{100}$$
$$\frac{5000 \quad 8 \quad 1}{100} \quad ₹400$$

प्रत्येक वर्ष के अन्त में ब्याज ₹400 ही प्राप्त होगा।

2 वर्ष के बाद ब्याज $\quad \frac{5000 \quad 8 \quad 2}{100} \quad ₹\,800$

इस प्रकार प्राप्त ब्याज की श्रणी $400, 800, 1200, \ldots$ होगी जो समान्तर श्रेढ़ी में हैं।

अब, $a \quad 400, d \quad 400, n \quad 30$

$\because \quad a_n \quad a \quad (n \quad 1)d$

$$400 \quad (30 \quad 1)\, 400$$
$$400 \quad 29 \quad 400$$
$$400 \quad 11600$$
$$₹12000$$

अत: अभीष्ट ब्याज ₹12000 है।

14. एक टैक्सी का किराया प्रथम किलोमीटर लिए ₹15 है और प्रथम किलोमीटर के बाद अतिरिक्त किराया ₹8 है। प्रत्येक किलोमीटर के बाद कुल किराया 15, 8, 8, 8, ... समान्तर श्रेढ़ी में नहीं है। क्या कथन सत्य है? कारण दीजिए।

हल दिया है, प्रथम किलोमीटर का किराया $\quad ₹15$

प्रथम किलोमीटर के बाद अतिरिक्त किराया $\quad ₹8$

किराए की श्रेणी $15, 23, 31, 39, \ldots$

जो दी गई श्रेणी $15, 8, 8, 8, \ldots$ के बराबर नहीं है

इस प्रकार दिया गया कथन असत्य है।

इसका कारण यह है कि प्रत्येक किलोमीटर के बाद अतिरिक्त किराया बढ़ता जाएगा जिससे समान्तर श्रेणी प्राप्त होगी, जबकि दी गई श्रेढ़ी एक स्थिर श्रेणी है।

प्रश्नावली 5.3

1. समान्तर श्रेढ़ी 50, 46, 42, ... के 10 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $a \quad 50, d \quad 46 \quad 50 \quad 4, n \quad 10$

n पदों का योगफल,

$$S_n \quad \frac{n}{2}\,[2a \quad (n \quad 1)\, d]$$
$$S_{10} \quad \frac{10}{2}\,[2(50) \quad (10 \quad 1)\,(\ 4)]$$
$$5\,[100 \quad 36] \quad 5 \quad 64 \quad 320$$

अत: अभीष्ट योगफल 320 है।

2. समान्तर श्रेढ़ी 2, 4, 6, ... 200 के 100 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल दी गई समान्तर श्रेढ़ी में,

$$a \quad 2, d \quad 4 \quad 2 \quad 2, l \quad 200, n \quad 100$$

$\because \quad S_n \quad \frac{n}{2}\,[a \quad l]$

$$S_{100} \quad \frac{100}{2}\,[2 \quad 200] \quad 50 \quad 202 \quad 10100$$

अत: अभीष्ट योगफल 10100 है।

3. किसी समान्तर श्रेढ़ी जिसका *n*वाँ पद 1 $4n$ है उसके प्रथम 25 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, a_n 1 $4n$

n 1 रखने पर,

a_1 1 4(1) 1 4 3

n 2 रखने पर,

a_2 1 4(2) 1 8 7

प्रथम पद, a 3,

सार्वान्तर (d) a_2 a_1 7 3 4

n 25

अब, S_n $\frac{n}{2}[2a$ $(n$ 1$)d]$ से,

S_{25} $\frac{25}{2}[2(\ 3)$ $(25$ 1$)(\ 4)]$

$\frac{25}{2}[\ 6$ $96]$

$\frac{25}{2}(\ 102)$ 25 $(\ 51)$

1275

4. किसी समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम 6 पदों का योगफल 36 तथा प्रथम 16 पदों का योगफल 256 है, तो समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम 10 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, S_6 36 तथा S_{16} 256

माना प्रथम पद a तथा सार्वान्तर d है।

अब, S_n $\frac{n}{2}[2a$ $(n$ 1$)d]$ से,

S_6 $\frac{6}{2}[2a$ $(6$ 1$)d]$

36 3$[2a$ $5d]$ $[\because S_6$ 36]

12 $2a$ $5d$

$2a$ $5d$ 12 ...(i)

पुनः S_{16} $\frac{16}{2}[2a$ $(16$ 1$)d]$

256 8$[2a$ $15d]$ $[\because S_{16}$ 256]

32 $2a$ $15d$

$2a$ $15d$ 32 ... (ii)

समी (i) में से समी (ii) को घटाने पर,

$10d$ 20

d $\frac{20}{10}$ 2

d का मान समी (i) में रखने पर,

$2a$ 5(2) 12

$2a$ 10 12 $2a$ 12 10

$2a$ 2 a $\frac{2}{2}$ 1

पुनः S_n $\frac{n}{2}[2a$ $(n$ 1$)d]$ से,

S_{10} $\frac{10}{2}[2(1)$ $(10$ 1$)(2)]$

5 [2 18] 5 20 100

5. समान्तर श्रेढ़ी 64, 60, 56, ... के उन पदों की संख्या ज्ञात कीजिए जिनका योग 544 है

हल दी गई श्रेणी में, a 64, d 60 64 4

माना पदों की संख्या n है।

S_n 544 या $\frac{n}{2}[2a$ $(n$ 1$)d]$ 544

$\because S_n$ $\frac{n}{2}[2a$ $(n$ 1$)d$

$\frac{n}{2}[2(64)$ $(n$ 1$)(\ 4)]$ 544

$\frac{n}{2}[128$ $4n$ 4] 544

$\frac{n}{2}[132$ $4n]$ 544

$\frac{4n}{2}[33$ $n]$ 544

$n(33$ $n)$ 272

$33n$ n^2 272

n^2 $33n$ 272 0

n^2 $(16$ 17$)n$ 272 0

n^2 $16n$ $17n$ 272 0

$n(n$ 16$)$ 17$(n$ 16$)$ 0

$(n$ 16$)(n$ 17$)$ 0

जब n 16 0 तथा n 17 0

n 16 तथा n 17

अतः पदों की संख्या 16, 17 है।

6. किसी समान्तर श्रेढ़ी के *n* पदों का योग S_n $n(4n$ 1) है, तो समान्तर श्रेढ़ी का *n*वाँ पद ज्ञात कीजिए तथा समान्तर श्रेढ़ी भी ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, S_n $n(4n$ 1)

n 1 रखने पर, S_1 1(4 1 1) 5

अर्थात् a_1 5(a)

n 2 रखने पर,

S_2 2(4 2 1) 18

$\because$ S_2 a_1 a_2

18 5 a_2 a_2 18 5

$d \quad a_2 \quad a_1 \quad d \quad 13 \quad 5 \quad 8$

अब, $a_n \quad a \quad (n \quad 1)\,d$ से,

$a_n \quad 5 \quad (n \quad 1)8$

$5 \quad 8n \quad 8 \quad 8n \quad 3$

अत: समान्तर श्रेढ़ी $a, a \quad d, a \quad 2d, \ldots$ अर्थात् $5, 13, 21, \ldots$ है।

7. किसी समान्तर श्रेढ़ी के nपदों का योगफलन $S_n \quad 2n^2 \quad 5n$ है, तो समान्तर श्रेढ़ी का nवाँ पद ज्ञात कीजिए

हल दिया है, $S_n \quad 2n^2 \quad 5n$

$n \quad 1$ रखने पर,

$S_1 \quad 2(1)^2 \quad 5(1) \quad 2 \quad 5 \quad 7$

अर्थात् $a_1 \quad 7(\quad a)$

$n \quad 2$ रखने पर,

$S_2 \quad 2(2)^2 \quad 5(2) \quad 8 \quad 10 \quad 18$

$\because \quad S_2 \quad a_1 \quad a_2$

$18 \quad 7 \quad a_2 \quad a_2 \quad 18 \quad 7 \quad 11$

$\because \quad d \quad a_2 \quad a_1 \quad d \quad 11 \quad 7 \quad 4$

अब, $a_n \quad a \quad (n \quad 1)\,d$ से,

$a_n \quad 7 \quad (n \quad 1)\,4$

$a_n \quad 7 \quad 4\,n \quad 4 \quad 4n \quad 3$

8. किसी समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम 21 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए जिसका दूसरा पद 8 तथा चौथा पद 4 हो।

हल दिया है, $a_2 \quad 8, a_4 \quad 4$

माना श्रेणी का प्रथम पद a तथा सार्वान्तर d है।

$\because \quad a_n \quad a \quad (n \quad 1)\,d$

$a_2 \quad 8 \quad a \quad (2 \quad 1)\,d$

$8 \quad a \quad d$

$a \quad d \quad 8 \quad \ldots(i)$

पुन: $a_4 \quad 4 \quad a \quad (4 \quad 1)\,d$

$4 \quad a \quad 3d$

$a \quad 3d \quad 4 \quad \ldots(ii)$

समी (i) में से समी (ii) को घटाने पर,

$2d \quad 4$

$d \quad \frac{4}{2} \quad 2$

d का मान समी (i) में रखने पर,

$a \quad 2 \quad 8 \qquad a \quad 8 \quad 2 \quad 10$

अब, $S_n \quad \frac{n}{2}[2a \quad (n \quad 1)\,d]$ से,

$S_{21} \quad \frac{21}{2}[20 \quad (21 \quad 1)(\quad 2)]$

$\frac{21}{2}[20 \quad 40] \quad \frac{21}{2} \quad (\quad 20) \quad 210$

9. एक समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम 17 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए जिसका चौथा तथा 9वाँ पद क्रमशः 15 और 30 हो।

हल दिया है, $a_4 \quad 15, a_9 \quad 30$

माना प्रथम पद a तथा सार्वान्तर d है।

$\because \quad a_n \quad a \quad (n \quad 1)\,d$

$a_4 \quad 15 \quad a \quad (4 \quad 1)\,d$

$15 \quad a \quad 3d$

$a \quad 3d \quad 15 \quad \ldots(i)$

तथा $a_9 \quad 30 \quad a \quad (9 \quad 1)\,d \quad [\because a_n \quad a \quad (n \quad 1)\,d]$

$30 \quad a \quad 8d$

$a \quad 8d \quad 30 \quad \ldots(ii)$

समी (i) में से समी (ii) को घटाने पर,

$5d \quad 15 \qquad d \quad \frac{15}{5} \quad 3$

d का मान समी (i) में रखने पर,

$a \quad 3(\quad 3) \quad 15$

$a \quad 15 \quad 9 \quad 6$

अब, $S_n \quad \frac{n}{2}[2a \quad (n \quad 1)\,d]$ से,

$S_{17} \quad \frac{17}{2}[2(\quad 6) \quad (17 \quad 1)(\quad 3)] \quad [\because n \quad 17]$

$\frac{17}{2}[\quad 12 \quad 48] \quad \frac{17}{2} \quad (\quad 60)$

$17 \quad (\quad 30) \quad 510$

10. किसी समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम p पदों का योगफल q तथा प्रथम q का योगफल p हो, तो उस समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम $p \quad q$ पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल माना समान्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद a तथा सार्वान्तर d है।

$\because \quad S_n \quad \frac{n}{2}[2a \quad (n \quad 1)\,d]$

$S_p \quad q \quad \frac{p}{2}[2a \quad (p \quad 1)\,d]$

$\frac{2q}{p} \quad 2a \quad (p \quad 1)\,d \quad \ldots(i)$

तथा $S_q \quad p \quad \frac{q}{2}[2a \quad (q \quad 1)\,d]$

$\frac{2p}{q} \quad 2a \quad (q \quad 1)\,d \quad \ldots(ii)$

समी (i) में से समी (ii) को घटाने पर,

$\frac{2q}{p} \quad \frac{2p}{q} \quad (p \quad 1 \quad q \quad 1)\,d$

$\frac{2(q^2 \quad p^2)}{pq} \quad (p \quad q)\,d$

$$\frac{2(q \quad p)(q \quad p)}{pq} \quad (q \quad p)d$$

$$d \quad \frac{2(p \quad q)}{pq}$$

d का मान समी (i) में रखने पर,

$$\frac{2q}{p} \quad 2a \quad (p \quad 1) \quad \frac{2(p \quad q)}{pq}$$

$$\frac{2q}{p} \quad 2a \quad 2\frac{(p \quad 1)(p \quad q)}{pq}$$

$$a \quad \frac{q}{p} \quad \frac{(p \quad 1)(p \quad q)}{pq}$$

[2 से भाग देने पर]

$$a \quad \frac{q^2 \quad p^2 \quad pq \quad p \quad q}{pq}$$

$$a \quad \frac{p^2 \quad q^2 \quad pq \quad p \quad q}{pq}$$

अब, $S_{p \quad q} \quad \frac{p \quad q}{2}$

$$\frac{2(p^2 \quad q^2 \quad pq \quad p \quad q)}{pq} \quad (p \quad q \quad 1) \quad \frac{2(p \quad q)}{pq}$$

$$\frac{(p \quad q)}{2} \quad 2$$

$$\frac{p^2 \quad q^2 \quad pq \quad p \quad q \quad p^2 \quad q^2 \quad 2pq \quad p \quad q}{pq}$$

$$(p \quad q) \quad \frac{pq}{pq} \quad (p \quad q)$$

अत: $S_{p \quad q} \quad (p \quad q)$ है।

11. यदि तीन संख्याएँ, जोकि समान्तर श्रेढ़ी में हैं। उनका योगफल तथा गुणनफल क्रमशः 3 तथा 8 है, तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल माना संख्याएँ $a \quad d, a, a \quad d$ हैं।

प्रथम प्रतिबन्ध से,

$$a \quad d \quad a \quad a \quad d \quad 3$$

$$3a \quad 3 \quad a \quad \frac{3}{3} \quad 1$$

द्वितीय प्रतिबन्ध से,

$$(a \quad d)(a)(a \quad d) \quad 8$$

$$a(a^2 \quad d^2) \quad 8 \quad (\ 1)[1 \quad d^2] \quad 8$$

$$1 \quad d^2 \quad 8 \quad d^2 \quad 1 \quad 8$$

$$d^2 \quad 9 \quad d \quad 3$$

अर्थात् $d \quad 3$ या 3

संख्याएँ $a \quad d, a, a \quad d$

$1 \quad 3, \quad 1, \quad 1 \quad 3$ या $1 \quad 3, \quad 1, \quad 1 \quad 3$

$4, \quad 1, 2$ या $2, \quad 1, \quad 4$

अत: संख्याएँ $4, \quad 1, 2$ या $2, \quad 1, \quad 4$ होंगी।

12. 228 लट्ठों को ढेरों के रूप में इस प्रकार रखा जाता है कि सबसे नीचे वाली पंक्ति में 30 लट्ठे उससे अगली पंक्ति में 28 लट्ठे, उससे अगली पंक्ति में 26 इत्यादि, ये लट्ठे कितनी पंक्ति में रखे गए हैं तथा सबसे ऊपरी पंक्ति में कितने लट्ठे हैं?

हल प्रश्नानुसार, नीचे से ऊपर की ओर पंक्तियों में रखे जाने वाले लट्ठों की श्रेढ़ी निम्न है

$$30, 28, 26, \ldots$$

प्रथम पद $(a) \quad 30,$

सार्वान्तर $(d) \quad 28 \quad 30 \quad 2$

माना सबसे ऊपरी पंक्ति में लट्ठों की संख्या x है तथा पंक्तियों की संख्या n है, अर्थात् अन्तिम पद $l \quad x$

अब, $S_n \quad \frac{n}{2}[2a \quad (n \quad 1)d]$ से,

$$228 \quad \frac{n}{2}[60 \quad (n \quad 1)(\ 2)]$$

$[\because S_n \quad 228 \quad$ कुल लट्ठों की संख्या]

$$228 \quad \frac{n}{2}[60 \quad 2n \quad 2]$$

$$228 \quad \frac{n}{2}[62 \quad 2n]$$

$$228 \quad \frac{n}{2} \quad 2(31 \quad n)$$

$$228 \quad n(31 \quad n) \quad 228 \quad 31n \quad n^2$$

$$n^2 \quad 31n \quad 228 \quad 0$$

$$n^2 \quad (12 \quad 19)n \quad 228 \quad 0$$

$$n^2 \quad 12n \quad 19n \quad 228 \quad 0$$

$$n(n \quad 12) \quad 19(n \quad 12) \quad 0$$

$$(n \quad 12)(n \quad 19) \quad 0$$

जब $n \quad 12 \quad 0$ तथा $n \quad 19 \quad 0$

$n \quad 12$ तथा $n \quad 19$

यदि $n \quad 12,$ तब

अन्तिम पद $(l) \quad x \quad a \quad (n \quad 1)d$

$$x \quad 30 \quad (12 \quad 1)(\ 2)$$

$$30 \quad 22 \quad 8$$

तथा यदि $n \quad 19,$ तब

$$x \quad 30 \quad (19 \quad 1)(\ 2)$$

$$30 \quad 36 \quad 6$$

[अमान्य है, क्योंकि लट्ठों की संख्या ऋणात्मक नहीं होगी]

अत: ऊपरी पंक्ति में लट्ठों की संख्या 8 है।

❐❐❐

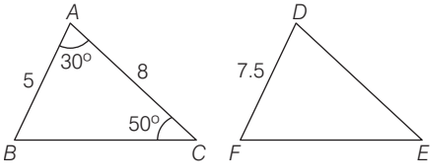
6

त्रिभुज

प्रश्नावली 6.1

1. यदि $\Delta ABC \sim \Delta DFE$, $\angle A = 30°$, $\angle C = 50°$, $AB = 5$ सेमी, $AC = 8$ सेमी और $DF = 7.5$ सेमी, तब DE और $\angle F$ के मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, ΔABC में, $\angle A = 30°$, $\angle C = 50°$, $AB = 5$ सेमी, $AC = 8$ सेमी और $DF = 7.5$ सेमी



$\because$ $ABC \sim DFE$

$\therefore$ $$\frac{AB}{DF} = \frac{AC}{DE} = \frac{BC}{FE}$$

[$\because$ समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं]

$\Rightarrow$ $$\frac{5}{7.5} = \frac{8}{DE} = \frac{BC}{FE}$$

I और II अनुपात से,

$$\frac{5}{7.5} = \frac{8}{DE}$$

$\Rightarrow$ $$DE = \frac{8 \times 7.5}{5}$$

$\Rightarrow$ $DE = 12$ सेमी

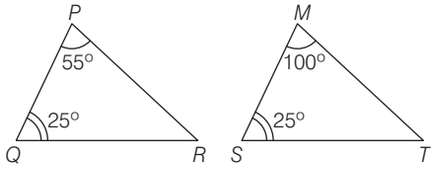
ΔABC में, $\angle B = 180° - (30° + 50°)$

$= 100°$

$\therefore \Delta DFE$ में, $\angle F = 100°$

2. ΔPQR और ΔMST में, $\angle P = 55°$, $\angle Q = 25°$, $\angle M = 100°$ और $\angle S = 25°$ है। क्या $\Delta QPR \sim \Delta TSM$ है? क्यों?

हल दिया है, ΔPQR और ΔMST में, $\angle P = 55°$, $\angle Q = 25°$, $\angle M = 100°$ और $\angle S = 25°$



ΔPQR में, $\angle R = 180° - (55° + 25°)$

$= 180° - 80° = 100°$

तथा ΔMST में,

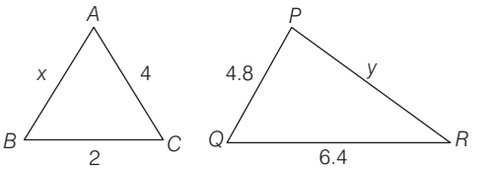
$\angle T = 180° - (100° + 25°)$

$= 180° - 125° = 55°$

$\because$ ΔPQR तथा ΔMST में दो संगत कोण समान नहीं है।

अत: ΔPQR और ΔMST समरूप नहीं है।

3. अज्ञात चरों के मान ज्ञात कीजिए, यदि ΔABC तथा ΔPQR समरूप हैं।



हल $\because$ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

$\therefore$ $$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{x}{4.8} = \frac{2}{6.4} = \frac{4}{y}$$

I और II अनुपात से,

$$\frac{x}{4.8} = \frac{2}{6.4}$$

$\Rightarrow$ $$x = \frac{2 \times 4.8}{6.4} \Rightarrow x = 1.5$$

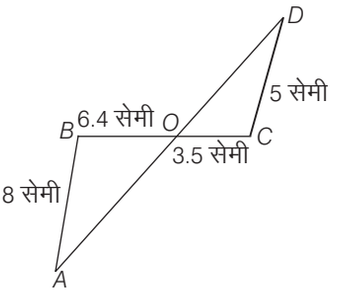
II और III अनुपात से,

$$\frac{2}{6.4} = \frac{4}{y} \Rightarrow y = \frac{4 \times 6.4}{2}$$

$\Rightarrow$ $y = 12.8$

अत: $x = 1.5$ तथा $y = 12.8$ है।

4. दी गई आकृति में, $\Delta OAB \sim \Delta OCD$, यदि $AB = 8$ सेमी, $BO = 6.4$ सेमी, $OC = 3.5$ सेमी तथा $CD = 5$ सेमी, तब OA और DO के मान ज्ञात कीजिए।



हल दी गई आकृति में, $\Delta OAB \sim \Delta OCD$

$$\therefore \quad \frac{AB}{DC} = \frac{BO}{DO} = \frac{AO}{CO}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{8}{5} = \frac{6.4}{DO} = \frac{AO}{3.5}$$

I और II अनुपात से,

$$\frac{8}{5} = \frac{6.4}{DO}$$

$$\Rightarrow \quad DO = \frac{6.4 \times 5}{8}$$

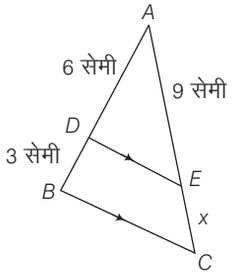
$$\Rightarrow \quad DO = 4 \text{ सेमी}$$

I और III अनुपात से,

$$\frac{8}{5} = \frac{AO}{3.5} \Rightarrow AO = \frac{8 \times 3.5}{5}$$

$$\Rightarrow \quad AO = 5.6 \text{ सेमी}$$

5. दी गई आकृति में, यदि $DE \| BC$, तब x का मान ज्ञात कीजिए।

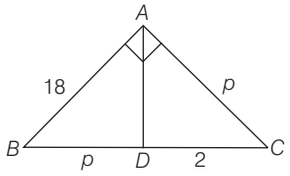


हल थेल्स प्रमेय से, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

$$\Rightarrow \quad \frac{6}{3} = \frac{9}{x} \Rightarrow x = \frac{3 \times 9}{6}$$

$$\Rightarrow \quad x = 4.5 \text{ सेमी}$$

6. दी गई आकृति में, यदि $\Delta ADB \sim \Delta ADC$, तब p का मान ज्ञात कीजिए।



हल $\because \quad \Delta ADB \sim \Delta ADC$

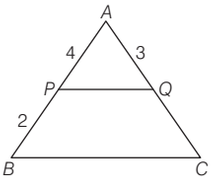
$$\therefore \quad \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} = \frac{AD}{AD}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{18}{p} = \frac{p}{2} \Rightarrow p^2 = 36 \Rightarrow p = 6$$

7. ΔABC में, P और Q, AB और AC पर स्थित बिन्दु हैं, जबकि $PQ \| BC$। यदि $AP = 4$ सेमी, $AQ = 3$ सेमी तथा $PB = 2$ सेमी, तब AC का मान ज्ञात कीजिए।

हल प्रश्नानुसार,

$$PQ \| BC$$



थेल्स प्रमेय से,

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} \Rightarrow \frac{4}{2} = \frac{3}{QC}$$

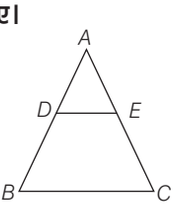
$$\Rightarrow \quad QC = \frac{3 \times 2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad QC = \frac{3}{2} = 1.5 \text{ सेमी}$$

तब, $\quad AC = AQ + QC$

$$= 3 + 1.5 = 4.5 \text{ सेमी}$$

8. दी गई आकृति में, यदि $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{5}$ और $AC = 4.8$ सेमी, तब AE का मान ज्ञात कीजिए।



हल थेल्स प्रमेय से,

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{5} = \frac{AE}{AC - AE}$$

$$\Rightarrow \quad 3AC - 3AE = 5AE$$

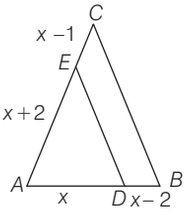
$$\Rightarrow \quad 3AC = 5AE + 3AE$$

$$\Rightarrow \quad 3 \times 4.8 = 8AE$$

$$\Rightarrow \quad AE = \frac{3 \times 4.8}{8}$$

$$\Rightarrow \quad AE = 1.8 \text{ सेमी}$$

9. दी गई आकृति में, $DE \| BC$ यदि $AD = x$, $DB = x - 2$, $AE = x + 2$ तथा $EC = x - 1$, तब x का मान ज्ञात कीजिए।



हल दी गई आकृति में, $DE \| BC$

थेल्स प्रमेय से,

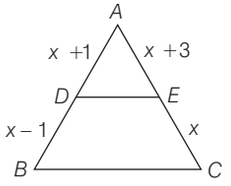
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{x-2} = \frac{x+2}{x-1}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - x = x^2 - 4$$

$$\Rightarrow \quad -x = -4 \Rightarrow x = 4$$

10. दी गई आकृति में, $DE \| BC$ है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।



हल दी गई आकृति में, $DE \| BC$

थेल्स प्रमेय से, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

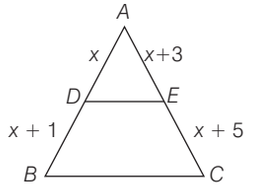
$$\Rightarrow \quad \frac{x+1}{x-1} = \frac{x+3}{x}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + x = x^2 + 3x - x - 3$$

$$\Rightarrow \quad x = 2x - 3$$

$$\Rightarrow \quad 2x - x = 3 \Rightarrow x = 3$$

11. ΔABC में, $DE \| BC$ (देखें आकृति) है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।



हल $\because DE \| BC$

$\therefore$ थेल्स प्रमेय से, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{x+1} = \frac{x+3}{x+5}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 5x = x^2 + 3x + x + 3$$

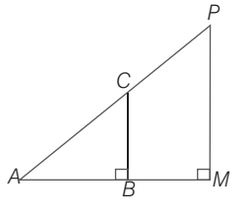
$$\Rightarrow \quad 5x = 4x + 3$$

$$\Rightarrow \quad 5x - 4x = 3$$

$$\Rightarrow \quad x = 3$$

12. ΔABC तथा ΔAMP क्रमशः B और M पर दो समकोण त्रिभुज हैं, तब सिद्ध कीजिए।

$$CA \times MP = PA \times BC$$



हल ΔABC तथा ΔAMP समकोण त्रिभुज है जो क्रमशः B और M पर समकोण बनाते हैं तथा $\angle A$ दोनों त्रिभुज में समान है।

$\therefore \quad \Delta ABC \sim \Delta AMP$

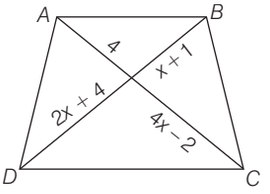
तब, $\frac{PA}{CA} = \frac{MP}{BC} = \frac{MA}{BA}$

I और II अनुपात से,

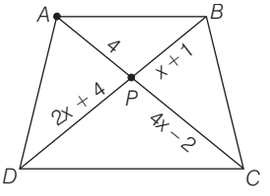
$$\frac{PA}{CA} = \frac{MP}{BC}$$

$$\Rightarrow \quad CA \times MP = PA \times BC$$ **इति सिद्धम्**

13. दी गई आकृति में, यदि $AB \| CD$, तब x का मान ज्ञात कीजिए।



हल दी गई आकृति में, माना AC तथा BD बिन्दु P पर काटते हैं



ΔAPB और ΔCPD में,

$\angle A = \angle C$ [$\because AB \| DC$]

$\angle B = \angle D$

$\therefore \quad \Delta APB \sim \Delta CPD$

तब, $\frac{AP}{PC} = \frac{BP}{PD}$

$$\Rightarrow \quad \frac{4}{4x-2} = \frac{x+1}{2x+4}$$

$$\Rightarrow \quad 8x + 16 = 4x^2 + 4x - 2x - 2$$

$$\Rightarrow \quad 4x^2 + 2x - 2 - 8x - 16 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4x^2 - 6x - 18 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2 - 3x - 9 = 0$$ [2 से भाग देने पर]

$$\Rightarrow \quad 2x^2 - (6-3)x - 9 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2 - 6x + 3x - 9 = 0$$

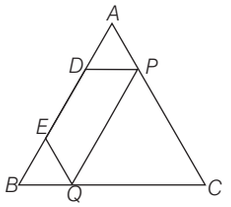
$$\Rightarrow \quad 2x(x-3) + 3(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x-3)(2x+3) = 0$$

जब $x - 3 = 0$ तथा $2x + 3 = 0$

$$\Rightarrow \quad x = 3 \text{ तथा } x = \frac{-3}{2} \text{ (अमान्य)}$$

14. दी गई आकृति में, D और E, भुजा AB पर स्थित दो बिन्दु हैं, जबकि $AD = BE$। यदि $DP \| BC$ और $EQ \| AC$, तब सिद्ध कीजिए कि $PQ \| AB$



हल दिया है, $DP \| BC$

$\therefore \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AP}{PC}$ [थेल्स प्रमेय से] ...(i)

तथा $EQ \| AC$

$\therefore \quad \frac{BQ}{QC} = \frac{BE}{EA} \Rightarrow \frac{CQ}{BQ} = \frac{EA}{BE}$

$\Rightarrow \quad \frac{CQ}{BQ} = \frac{ED + AD}{BE}$

$\Rightarrow \quad \frac{CQ}{BQ} = \frac{DB - BE + AD}{BE}$

$\Rightarrow \quad \frac{CQ}{BQ} = \frac{DB - AD + AD}{AD}$ [$\because AD = BE$]

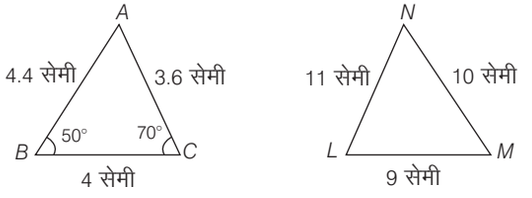
$\Rightarrow \quad \frac{CQ}{BQ} = \frac{DB}{AD}$

$\Rightarrow \quad \frac{CQ}{BQ} = \frac{PC}{AP}$ [समी (i) से]

$\therefore \quad PQ \| AB$ [थेल्स प्रमेय से] **इति सिद्धम्**

प्रश्नावली 6.2

1. दी गई आकृति में, $\angle MLN$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल दी गई आकृति ΔABC में, $\angle A = 180° - (50° + 70°) = 60°$

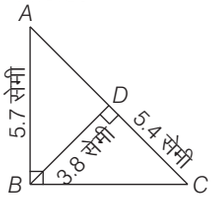
अब, ΔABC तथा ΔLMN में,

$$\frac{AB}{NL} = \frac{BC}{NM} = \frac{AC}{LM}$$

$\therefore \quad \Delta ABC \sim \Delta LMN$

$\therefore \quad \angle MLN = \angle A = 60°$

2. दी गई आकृति में, $\angle ABC = 90°$ तथा $BD \perp AC$। यदि $AB = 5.7$ सेमी, $BD = 3.8$ सेमी तथा $CD = 5.4$ सेमी हो, तब BC का मान ज्ञात कीजिए।



हल ΔABC तथा ΔBDC में,

$\angle ABC = BDC$ [प्रत्येक 90°]

$\angle C = \angle C$

$\therefore \quad \Delta ABC \sim \Delta BDC$ [AA समरूपता कसौटी से]

$\therefore \quad \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{BC} = \frac{BC}{CD}$

I और III अनुपात से,

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{CD}$$

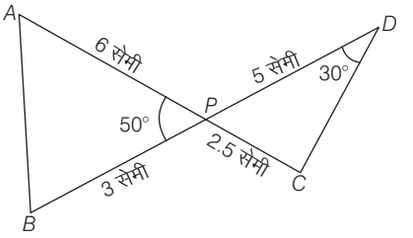
$\Rightarrow \quad \frac{5.7}{3.8} = \frac{BC}{5.4}$

$\Rightarrow \quad BC = \frac{5.7 \times 5.4}{3.8}$

$\Rightarrow \quad BC = 8.1$ सेमी

नोट—यह प्रश्न ΔBDC में पाइथागोरस प्रमेय के प्रयोग से भी हल किया जा सकता है।

3. दी गई आकृति में, दो रेखाखण्ड AC और BD परस्पर बिन्दु P पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि $PA = 6$ सेमी, $PB = 3$ सेमी, $PC = 2.5$ सेमी, $PD = 5$ सेमी, $\angle APB = 50°$ और $\angle CDP = 30°$ है, तब $\angle PBA$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल दी गई आकृति में,

$\angle APB = \angle CPD = 50°$ [शीर्षाभिमुख कोण]

ΔCPD में,

$\angle PCD = 180° - (50° + 30°)$

$= 180° - 80°$

$= 100°$

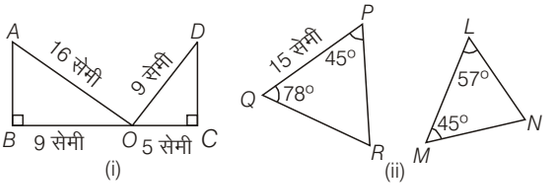
तथा ΔAPB और ΔCPD में,

$$\frac{AP}{DP} = \frac{BP}{CP}$$

$\therefore \quad \Delta APB \sim \Delta CPD$

$\therefore \quad \angle PBA = \angle PCD = 100°$

4. बताइए कि दिए गए त्रिभुजों का युग्म समरूप है या नहीं। समरूपता की स्थिति में, कसौटी को भी लिखिए।



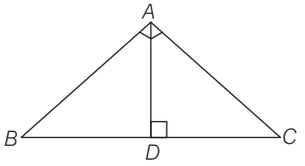
हल (i) त्रिभुजों का युग्म समरूप नहीं हैं, क्योंकि

$$\frac{OA}{OD} \neq \frac{OB}{OC} \neq \frac{AB}{DC}$$

(ii) त्रिभुजों का युग्म समरूप है, क्योंकि

$\angle Q = \angle N, \angle P = \angle M$ [AA समरूपता कसौटी]

5. दी गई आकृति में, यदि $\angle BAC = 90°$ तथा $AD \perp BC$, सिद्ध कीजिए कि $AD^2 = BD \cdot CD$



हल ΔBAC और ΔBDA में,

$\angle A = \angle D$ [प्रत्येक $90°$]

$\angle B = \angle B$

$\therefore$ $\Delta BAC \sim \Delta BDA$

तब, $\frac{BC}{BA} = \frac{AC}{AD} = \frac{BA}{BD}$

II और III अनुपात से,

$$\frac{AC}{AD} = \frac{BA}{BD}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BA} \qquad \ldots(i)$$

इसी प्रकार $\Delta CAB \sim \Delta CDA$

तब, $\frac{BC}{AC} = \frac{BA}{AD} = \frac{AC}{DC}$

II और III अनुपात से, $\frac{BA}{AD} = \frac{AC}{CD}$

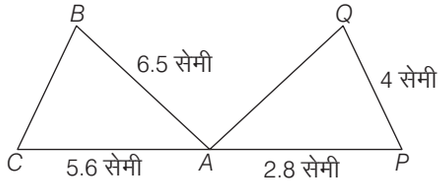
$$\Rightarrow \quad \frac{CD}{AD} = \frac{AC}{BA} \qquad \ldots(ii)$$

समी (i) तथा (ii) से,

$$\frac{AD}{BD} = \frac{CD}{AD}$$

$$\Rightarrow \quad AD^2 = BC \cdot CD$$ **इति सिद्धम्**

6. दी गई आकृति में, $\Delta ACB \sim \Delta APQ$ है। यदि $CB = 8$ सेमी, $PQ = 4$ सेमी, $BA = 6.5$ सेमी तथा $AP = 2.8$ सेमी हो, तो CA और AQ ज्ञात कीजिए।



हल $\Delta ACB \sim \Delta APQ$

$$\therefore \quad \frac{BA}{AQ} = \frac{CA}{AP} = \frac{CB}{PQ} \Rightarrow \frac{6.5}{AQ} = \frac{CA}{2.8} = \frac{8}{4}$$

I और III अनुपात से

$$\frac{6.5}{AQ} = \frac{8}{4}$$

$$\Rightarrow \quad AQ = \frac{6.5 \times 4}{8} = 3.25 \text{ सेमी}$$

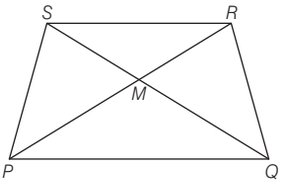
II और III अनुपात से

$$\frac{CA}{2.8} = \frac{8}{4}$$

$$\Rightarrow \quad CA = \frac{8 \times 2.8}{4} = 5.6 \text{ सेमी}$$

7. $PQRS$ समलम्ब है, जबकि $PQ \| SR$ विकर्ण PR और SQ एक-दूसरे को M पर प्रतिच्छेद करते हैं तथा $\Delta PMS \sim \Delta QMR$, सिद्ध कीजिए कि $PS = QR$

हल दिया है, $PQ \| SR$



$\therefore$ क्षेत्रफल (ΔSPQ) = क्षेत्रफल (ΔRPQ)

$\Rightarrow$ क्षेत्रफल (ΔPSM) + क्षेत्रफल (ΔPMQ)

= क्षेत्रफल (ΔQMR) + क्षेत्रफल (ΔMQ)

$\Rightarrow$ क्षेत्रफल (ΔPSM) = क्षेत्रफल (ΔQMR) $\ldots(i)$

प्रश्नानुसार, $\Delta PSM \sim \Delta QMR$

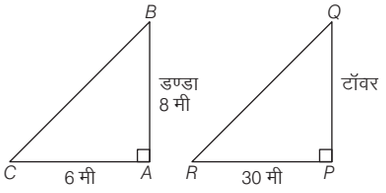
$$\Rightarrow \quad \frac{\text{क्षेत्रफल } (\Delta PSM)}{\text{क्षेत्रफल } (\Delta QMR)} = \frac{PS^2}{QR^2} \qquad \ldots(ii)$$

समी (i) तथा (ii) से, $PS^2 = PM^2$

$$\Rightarrow \quad PS = QR$$ **इति सिद्धम्**

8. 8 मी ऊँचे लम्बवत् डण्डे की भूमि पर परछाई 6 मी लम्बी है। उसी समय एक टॉवर की भूमि पर परछाई 30 मी लम्बी है। टॉवर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल $\because \Delta ABC$ तथा ΔPQR समरूप हैं।



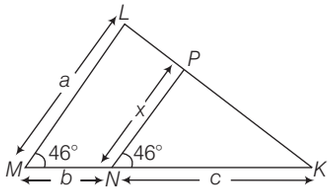
$$\therefore \quad \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} \Rightarrow \frac{8}{PQ} = \frac{6}{30}$$

$$\Rightarrow \quad PQ = \frac{8 \times 30}{6}$$

$$\Rightarrow \quad PQ = 40 \text{ मी}$$

अत: टॉवर की ऊँचाई 40 मी है।

9. निम्न आकृति में, $\angle N = \angle M = 46°$ है। x का मान a, b तथा c के पदों में लिखिए, जहाँ a, b और c क्रमशः रेखाखण्ड LM, MN तथा NK की लम्बाइयाँ हैं।



हल प्रश्नानुसार, $\angle N = \angle M = 46°$

$\therefore \Delta KNP$ तथा ΔKML में,

$$\angle K = \angle K$$

$$\angle N = \angle M$$

$\therefore \quad \Delta KNP \sim \Delta KML$ [AA समरूपता कसौटी से]

तब, $$\frac{KN}{KM} = \frac{NP}{ML} = \frac{KP}{KL}$$

I और II अनुपात से,

$$\frac{KN}{KM} = \frac{NP}{ML}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{c}{c+b} = \frac{x}{a}$$

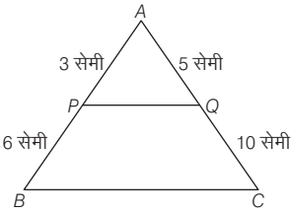
$$\Rightarrow \quad x = \frac{ac}{b+c}$$

10. बिन्दु P और Q, ΔABC के क्रमशः भुजाओं AB और AC पर स्थित हैं। यदि $AP = 3$ सेमी, $PB = 6$ सेमी, $AQ = 5$ सेमी तथा $QC = 10$ सेमी, तब दिखाइए कि $BC = 3PQ$

हल ΔAPQ तथा ΔABC में,

$$\angle A = \angle A$$

तथा $$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC}$$



$\therefore \quad \Delta APQ \sim \Delta ABC$

तब, $$\frac{AP}{AB} = \frac{PQ}{BC} = \frac{AQ}{AC}$$

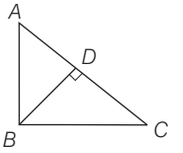
I और II अनुपात से,

$$\frac{AP}{AB} = \frac{PQ}{BC}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{9} = \frac{PQ}{BC}$$

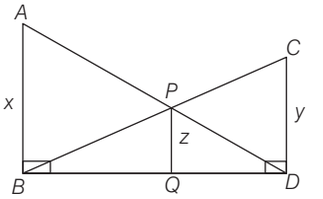
$$\Rightarrow \quad BC = 3PQ$$ **इति सिद्धम्**

11. दी गई आकृति में, ABC एक त्रिभुज है जिसका $\angle B$ समकोण है तथा $BD \perp AC$ है। यदि $AD = 4$ सेमी और $CD = 5$ सेमी है, तो BD और AB ज्ञात कीजिए।



हल प्रश्न 5 की भाँति हल करके मान रखें।

12. दी गई आकृति में, $AB \| PQ \| CD$, $AB = x$ इकाई, $CD = y$ इकाई तथा $PQ = z$ इकाई, सिद्ध कीजिए कि $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$



हल $\because \quad AB \| PQ$

$\therefore \quad \frac{DQ}{DB} = \frac{PQ}{AB} \Rightarrow \frac{DQ}{DB} = \frac{z}{x}$

$$\Rightarrow \quad DB = \frac{x}{z} DQ \qquad \ldots(i)$$

तथा $PQ \| CD$

$\therefore \quad \frac{BQ}{DB} = \frac{PQ}{CD}$

$$\Rightarrow \quad DB = BQ.\frac{CD}{PQ}$$

$$\Rightarrow \quad DB = \frac{y}{z} BQ \qquad \ldots(ii)$$

समी (i) तथा (ii) से,

$$\frac{x}{z} DQ = \frac{y}{z} BQ$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{y} = \frac{BQ}{DQ}$$

दोनों पक्षों में 1 जोड़ने पर,

$$\frac{x}{y} + 1 = \frac{BQ}{DQ} + 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x+y}{y} = \frac{BQ + DQ}{DQ}$$

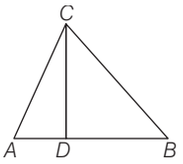
$$\Rightarrow \quad \frac{x+y}{y} = \frac{DB}{DQ}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x+y}{y} = \frac{x}{z}$$ [समी (i) से]

$$\Rightarrow \quad \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$ **इति सिद्धम्**

13. निम्न आकृति में, यदि $\angle ACB = \angle CDA$, $AC = 8$ सेमी और $AD = 3$ सेमी है, तो BD ज्ञात कीजिए।



हल ΔACB और ΔCDA में,

$\angle ACB = \angle CDA \Rightarrow \angle A = \angle A$

$\therefore \quad \Delta ACB \sim \Delta CDA$

$\Rightarrow \quad \frac{AB}{AC} = \frac{CB}{CD} = \frac{AC}{AD}$

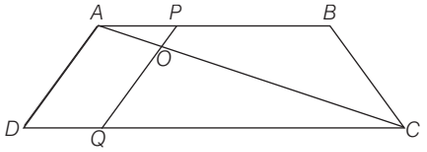
I और III अनुपात से,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow \frac{AB}{8} = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \quad AB = \frac{64}{3} \text{ सेमी}$$

अब, $\quad BD = AB - AD = \frac{64}{3} - 3 = \frac{55}{3}$ सेमी

14. दी गई आकृति में, यदि $AB \| DC$ तथा AC और PQ परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $OA \cdot CQ = OC \cdot AP$



हल ΔAOP तथा ΔCOQ में,

$AB \| DC$ [दिया है]

$\therefore \quad \left.\begin{matrix} \angle PAO = \angle QCO \\ \angle APO = \angle CQO \end{matrix}\right\}$ [एकान्तर कोण]

$\Rightarrow \quad \angle AOP = \angle QOC$ [शीर्षाभिमुख कोण]

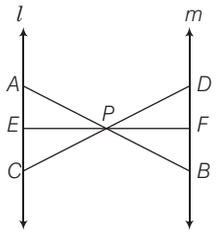
$\therefore \quad \Delta AOP \sim \Delta COQ$ [AAA समरूपता कसौटी से]

$\Rightarrow \quad \frac{OA}{OC} = \frac{AP}{CQ}$

$\Rightarrow \quad OA \cdot CQ = OC \cdot AP$ **इति सिद्धम्**

15. निम्न आकृति में, $l \| m$ तथा रेखाखण्ड AB, CD और EF, बिन्दु P पर संगामी हैं। सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{AE}{BF} = \frac{AC}{BD} = \frac{CE}{FD}$$



हल $\because \quad l \| m$ [दिया है]

ΔPEA तथा ΔPBF में,

$\angle PAE = \angle PBF$ [एकान्तर कोण]

$\angle APE = \angle BPE$ [शीर्षाभिमुख कोण]

$\therefore \quad \Delta PEA \sim \Delta PBF$ [AA समरूपता से]

तब, $\quad \frac{AE}{BF} = \frac{PE}{PF} = \frac{PA}{PB}$ ...(i)

ΔPEC तथा ΔPED में,

$\angle CPE = \angle DPF$ [शीर्षाभिमुख कोण]

$\angle PCE = \angle PDF$ [एकान्तर कोण]

$\therefore \quad \Delta PEC \sim \Delta PED$ [AA समरूपता से]

तब, $\quad \frac{CE}{FD} = \frac{PE}{PF} = \frac{PC}{PD}$ ...(ii)

ΔPAC तथा ΔPDF में,

$\angle PAC = \angle PBD$

$\angle PCA = \angle PDB$ [एकान्तर कोण]

$\therefore \quad \Delta PAC \sim \Delta PDF$

तब, $\quad \frac{AC}{BD} = \frac{PA}{PB} = \frac{PC}{PD}$ ...(iii)

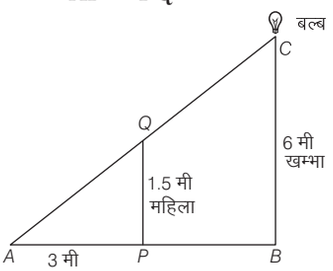
समी (i), (ii) तथा (iii) से,

$$\frac{AE}{BF} = \frac{AC}{BD} = \frac{CE}{FD}$$ **इति सिद्धम्**

16. सड़क पर लगा एक बिजली का बल्ब एक खम्भें पर सड़क के स्तर से 6 मी ऊपर लगाया गया है। यदि 1.5 मी लम्बाई वाली एक महिला की छाया 3 मी लम्बी है, तो ज्ञात कीजिए कि वह महिला खम्भे के आधार से कितनी दूरी पर खड़ी है?

हल समरूप ΔABC तथा ΔAPQ में,

$$\frac{AB}{AP} = \frac{BC}{PQ}$$



$\Rightarrow \quad \frac{AB}{3} = \frac{6}{1.5}$

$\Rightarrow \quad AB = \frac{6 \times 3}{1.5}$

$\Rightarrow \quad AB = 12$ मी

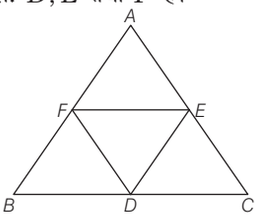
$\therefore$ महिला की खम्भे के आधार से दूरी,

$BP = AB - AP$

$= 12 - 3 = 9$ मी

17. सिद्ध कीजिए किसी त्रिभुज के मध्य-बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखण्डों से बने चारों त्रिभुज मूल त्रिभुज के समरूप हैं।

हल माना ABC एक त्रिभुज है, जिसकी भुजाओं BC, CA तथा AB के मध्य-बिन्दु क्रमश: D, E तथा F हैं।



ΔAFE तथा ΔABC में,

$$\angle A = \angle A$$

$$\frac{AF}{AB} = \frac{AE}{EC} \qquad \left[\because AF = \frac{AB}{2} \text{ तथा } AE = \frac{AC}{2}\right]$$

$\therefore$ $BC \| FE$

अत: $\Delta AFE \sim \Delta ABC$ [थेल्स प्रमेय से]

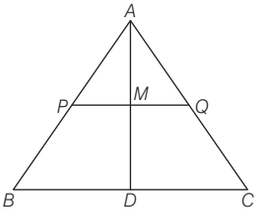
इसी प्रकार $\Delta FBD \sim \Delta ABC$

$\Delta EDC \sim \Delta ABC$

$\Delta FED \sim \Delta ABC$ **इति सिद्धम्**

18. ΔABC में, बिन्दु P और Q क्रमशः AB और AC पर स्थित हैं तथा $PQ \| BC$, सिद्ध कीजिए माध्यिका AD, PQ को समद्विभाजित करती है।

हल दिया है, ΔABC में, भुजा AB और AC पर बिन्दु P और Q स्थित हैं।



तथा $PQ \| BC$, AD भुजा BC की माध्यिका है।

$\therefore$ $$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$$

$\therefore$ $\Delta APQ \sim \Delta ABC$ [थेल्स प्रमेय से]

$\because$ $BD = DC$

$\therefore$ $PM = MQ$ **इति सिद्धम्**

❐❐❐

7

निर्देशांक ज्यामिति

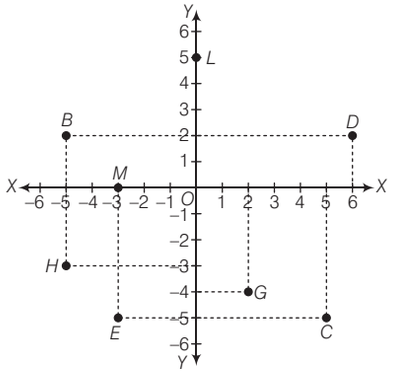
प्रश्नावली 7.1

1. चित्र को देखिए तथा निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए।

(i) B का निर्देशांक (ii) C का निर्देशांक

(iii) बिन्दु D का भुज (iv) बिन्दु H की कोटि

(v) बिन्दु L का निर्देशांक



हल (i) B के निर्देशांक $(-5, 2)$

(ii) C के निर्देशांक $(5, -5)$

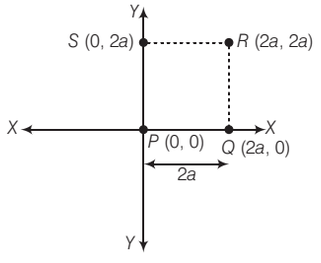
(iii) बिन्दु D का भुज, $x = 6$

(iv) बिन्दु H की कोटि, $y = -3$

(v) बिन्दु L के निर्देशांक $(0, 5)$

2. यदि $PQRS$ एक वर्ग है, जिसकी प्रत्येक भुजा की लम्बाई $2a$ है। वर्ग के शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जबकि बिन्दु P मूल बिन्दु है तथा PQ और PS क्रमशः OX और OY के साथ हैं।

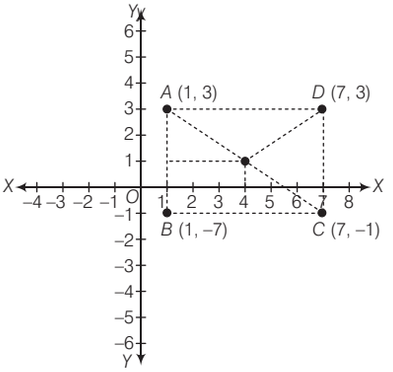
हल



चित्र से, $P(0, 0), Q(2a, 0), R(2a, 2a), S(0, 2a)$ होंगे।

3. निम्नलिखित बिन्दुओं का कार्तीय तल में स्थान निर्धारित कीजिए तथा इनको आपस में क्रम से मिलाकर और प्राप्त चित्र की पहचान कीजिए। $A(1, 3), B(1, -1), C(7, -1)$ तथा $D(7, 3)$ तथा उस बिन्दु का निर्देशांक ज्ञात कीजिए जहाँ विकर्ण एक-दूसरे को काटते हैं।

हल चित्र में, आयत का चित्र प्राप्त होता है, इसके विकर्ण एक-दूसरे को बिन्दु $(4, 1)$ पर काटते हैं।

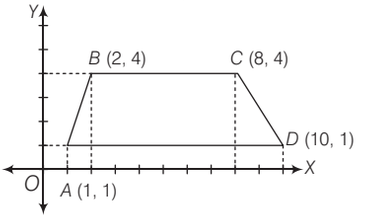


4. चतुर्भुज को बनाइए तथा चतुर्भुज का नाम भी बताइए, यदि उसके शीर्ष निम्न हों

(i) $(1, 1), (2, 4), (8, 4)$ तथा $(10, 1)$

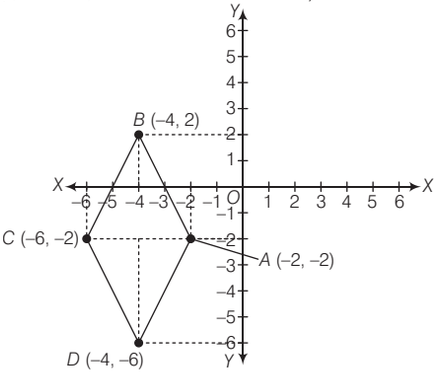
(ii) $(-2, -2), (-4, -2), (-6, -2)$ तथा $(-4, -6)$

हल (i) बिन्दु $a(1, 1)$, $b(2, 4)$, $c(8, 4)$ तथा $d(10, 1)$ के निर्देशांक अक्षों पर निरूपित करने पर,



चित्र में एक समलम्ब प्राप्त होता है।

(ii) बिन्दु $A(-2, -2), B(-4, 2), C(-6, -2)$ तथा $D(-4, -6)$ को निर्देशांक अक्षों पर निरूपित करने पर,



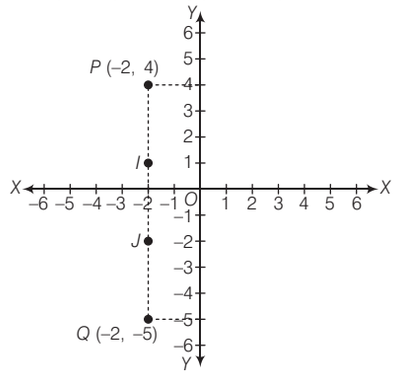
चित्र में प्राप्त आकृति एक समचतुर्भुज है।

5. (i) बिन्दुओं $P(\ 2, 4)$ और $Q(\ 2,\ \ 5)$ को आलेखित कीजिए।

(ii) PQ की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

(iii) बिन्दुओं I और J का निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जबकि $PI\ \ IJ\ \ JQ$

हल (i) बिन्दुओं $P(\ 2, 4)$ और $Q(\ 2,\ \ 5)$ का आलेख निम्न है



(ii) PQ की लम्बाई $\ \ 9$ इकाई

(iii) $\because \quad PI\ \ IJ\ \ JQ \quad \frac{9}{3} \quad 3$

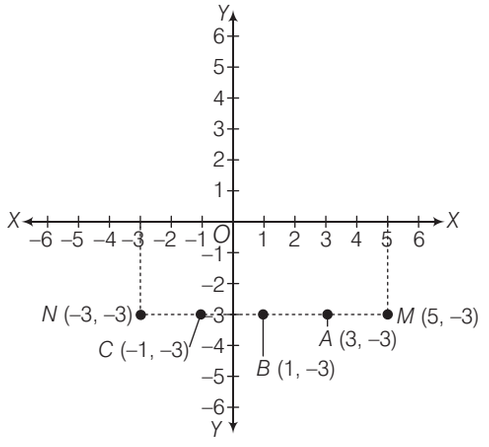
अत: I का निर्देशांक $(\ 2, 1)$ तथा J का निर्देशांक $(\ 2,\ \ 2)$ है।

6. (i) बिन्दुओं $M(5,\ \ 3)$ और $N(\ 3,\ \ 3)$ को आलेखित कीजिए।

(ii) MN की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

(iii) रेखा MN पर स्थित बिन्दुओं A, B तथा C के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जबकि $\ MA\ \ AB\ \ BC\ \ CN$ है।

हल (i) बिन्दुओं $M(5,\ \ 3)$ और $N(\ 3,\ \ 3)$ का आलेख



(ii) MN की लम्बाई $\ \ 8$ इकाई

(iii) प्रश्नानुसार,

$MA\ \ AB\ \ BC\ \ CN \quad \frac{8}{4} \quad 2$

$A(3,\ \ 3), B(1,\ \ 3), C(\ 1,\ \ 3)$ है।

प्रश्नावली 7.2

1. बिन्दु (8, 6) की मूलबिन्दु से दूरी ज्ञात कीजिए।

हल बिन्दु $(x_1, y_1)\ \ (\ 8, 6)$ तथा मूलबिन्दु $(x_2, y_2)\ \ (0, 0)$ के बीच की दूरी,

$$d \quad \sqrt{(x_2 \quad x_1)^2 \quad (y_2 \quad y_1)^2}$$

$$\sqrt{(0 \quad 8)^2 \quad (0 \quad 6)^2}$$

$$\sqrt{64 \quad 36} \quad \sqrt{100} \quad 10 \text{ इकाई}$$

2. दिए गए बिन्दुओं के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

(i) $(\ 7,\ \ 3)$ और $(\ 5,\ \ 11)$

(ii) $\frac{6}{5},\ \ 3$ और $\ \ 4, \frac{7}{5}$

(iii) $(a \sin\ \ ,\ \ b \cos\ \ )$ और $(\ a \cos\ \ , b \sin\ \ )$

(iv) $(\cos\ \ ,\ \ \sin\ \ )$ और $(\ \cos\ \ , \sin\ \ )$

हल (i) बिन्दुओं $(x_1, y_1)\ \ (\ 7,\ \ 3)$ और $(x_2, y_2)\ \ (\ 5,\ \ 11)$ के बीच की दूरी,

$$d \quad \sqrt{(x_2 \quad x_1)^2 \quad (y_2 \quad y_1)^2}$$

$$\sqrt{(\ 5 \quad 7)^2 \quad (\ 11 \quad 3)^2}$$

$$\sqrt{(2)^2 \quad (8)^2} \quad \sqrt{4 \quad 64} \quad \sqrt{68} \text{ इकाई}$$

(ii) बिन्दुओं $(x_1, y_1) \quad \frac{6}{5},\ \ 3$ और

$(x_2, y_2) \quad \ \ 4, \frac{7}{5}$ के बीच की दूरी,

$$d \quad \sqrt{(x_2 \quad x_1)^2 \quad (y_2 \quad y_1)^2}$$

$$\sqrt{\ \ 4 \quad \frac{6}{5}^{\ 2} \quad \ \ \frac{7}{5} \quad \ 3^{\ 2}}$$

$$\sqrt{\frac{14}{5}^{\ 2} \quad \ \frac{8}{5}^{\ 2}} \quad \sqrt{\frac{196}{25} \quad \frac{64}{25}}$$

$$\sqrt{\frac{260}{25}} \quad \frac{\sqrt{260}}{5} \text{ इकाई}$$

(iii) बिन्दुओं $(x_1, y_1)\ \ (a \sin\ \ ,\ \ b \cos\ \ )$ और $(x_2, y_2)\ \ (\ a \cos\ \ , b \sin\ \ )$ के बीच की दूरी,

$$d \quad \sqrt{(x_2 \quad x_1)^2 \quad (y_2 \quad y_1)^2}$$

$$\sqrt{(\ a\cos \quad a \sin\ \ )^2 \quad (b \sin \quad b \cos\ \ )^2}$$

$$\sqrt{\begin{array}{l} a^2 \cos^2 \quad a^2 \sin^2 \quad 2a^2 \sin \quad \cos \\ b^2 \sin^2 \quad b^2 \cos^2 \quad 2b^2 \sin \quad \cos \end{array}}$$

$$\sqrt{\begin{array}{l} a^2(\cos^2 \quad \sin^2 \quad 2 \sin \quad \cos\ \ ) \\ b^2(\sin^2 \quad \cos^2 \quad 2 \sin \quad \cos\ \ ) \end{array}}$$

$\sqrt{a^2(\cos \quad \sin \ )^2 \quad b^2(\cos \quad \sin \ )^2}$

$(\cos \quad \sin \ )\sqrt{a^2 \quad b^2}$ इकाई

(iv) बिन्दुओं (x_1, y_1) $(\cos \ , \ \sin \ )$ और (x_2, y_2) $(\ \cos \ , \sin \ )$ के बीच की दूरी,

$d \quad \sqrt{(x_2 \quad x_1)^2 \quad (y_2 \quad y_1)^2}$

$\sqrt{(\ \cos \quad \cos \ )^2 \quad (\sin \quad \sin \ )^2}$

$\sqrt{(\ 2\cos \ )^2 \quad (2\sin \ )^2}$

$\sqrt{(4\cos^2 \quad 4\sin^2 \ )}$

$2\sqrt{(\cos^2 \quad \sin^2 \ )}$

$2\sqrt{1} \quad 2 \qquad [\because \cos^2 \quad \sin^2 \quad 1]$

3. दिखाइए कि बिन्दुओं (4, 2), (7, 5) तथा (9, 7) से त्रिभुज नहीं बनाया जा सकता है।

हल ∵ दिए गए बिन्दु $A(4, 2), B(7, 5), C(9, 7)$ हैं।

$AB \quad \sqrt{(x_2 \quad x_1)^2 \quad (y_2 \quad y_1)^2}$

$\sqrt{(7 \quad 4)^2 \quad (5 \quad 2)^2}$

$\sqrt{9 \quad 9} \quad \sqrt{18} \quad 3\sqrt{2}$

$BC \quad \sqrt{(9 \quad 7)^2 \quad (7 \quad 5)^2}$

$\sqrt{4 \quad 4} \quad \sqrt{8} \quad 2\sqrt{2}$

$CA \quad \sqrt{(9 \quad 4)^2 \quad (7 \quad 2)^2}$

$\sqrt{25 \quad 25}$

$\sqrt{50} \quad 5\sqrt{2}$

∵ $CA \quad AB \quad BC$

त्रिभुज सम्भव नहीं है, क्योंकि त्रिभुज में दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा।

4. यदि बिन्दु $P(x, y)$ बिन्दुओं $A(5, 1)$ और $B(1, 5)$ से समान दूरी पर हों, तो सिद्ध कीजिए कि $x \quad y$

हल प्रश्नानुसार, $PA \quad PB$

$\sqrt{(x \quad 5)^2 \quad (y \quad 1)^2} \quad \sqrt{(x \quad 1)^2 \quad (y \quad 5)^2}$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$x^2 \quad 25 \quad 10x \quad y^2 \quad x^2 \quad 1 \quad 2x \quad y^2 \quad 25 \quad 10y \quad 1 \quad 2y$

$10x \quad 2y \quad 26 \quad 2x \quad 10y \quad 26$

$10x \quad 2x \quad 10y \quad 2y$

$8x \quad 8y$

$x \quad y$ इति सिद्धम्

5. दिखाइए कि बिन्दु (1, 1), (5, 2) और (9, 5) संरेखीय हैं।

हल ∵ दिए गए बिन्दु $A(1, \ 1), B(5, 2), C(9, 5)$ हैं।

तब, $AB \quad \sqrt{(x_2 \quad x_1)^2 \quad (y_2 \quad y_1)^2}$

$\sqrt{(5 \quad 1)^2 \quad (2 \quad 1)^2}$

$\sqrt{16 \quad 9} \quad \sqrt{25} \quad 5$

$BC \quad \sqrt{(x_2 \quad x_1)^2 \quad (y_2 \quad y_1)^2}$

$\sqrt{(9 \quad 5)^2 \quad (5 \quad 2)^2}$

$\sqrt{16 \quad 9} \quad \sqrt{25} \quad 5$

$CA \quad \sqrt{(x_2 \quad x_1)^2 \quad (y_2 \quad y_1)^2}$

$\sqrt{(9 \quad 1)^2 \quad (5 \quad 1)^2}$

$\sqrt{64 \quad 36} \quad \sqrt{100} \quad 10$

∵ $CA \quad AB \quad BC$

अत: ये बिन्दु संरेखीय हैं।

6. दिखाइए कि बिन्दु (3, 2), $4, \frac{5}{2}$ तथा (5, 3) संरेखीय हैं।

हल ∵ दिए गए बिन्दु $A(3, 2), B\ 4, \frac{5}{2}\ , C(5, 3)$ हैं।

तब, $AB \quad \sqrt{(x_2 \quad x_1)^2 \quad (y_2 \quad y_1)^2}$

$\sqrt{(4 \quad 3)^2 \quad \frac{5}{2} \quad 2 \ ^2} \quad \sqrt{1 \quad \frac{1}{4}} \quad \frac{\sqrt{5}}{2}$

$BC \quad \sqrt{(x_2 \quad x_1)^2 \quad (y_2 \quad y_1)^2}$

$\sqrt{(5 \quad 4)^2 \quad 3 \quad \frac{5}{2} \ ^2}$

$\sqrt{1 \quad \frac{1}{4}} \quad \frac{\sqrt{5}}{2}$

$CA \quad \sqrt{(x_2 \quad x_1)^2 \quad (y_2 \quad y_1)^2}$

$\sqrt{(5 \quad 3)^2 \quad (3 \quad 2)^2}$

$\sqrt{4 \quad 1} \quad \sqrt{5}$

∵ $CA \quad AB \quad BC$

अत: ये बिन्दु संरेखीय हैं।

7. X-अक्ष पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (7, 4) से $2\sqrt{5}$ इकाई दूरी पर है, इस प्रकार के कितने बिन्दु हो सकते हैं?

हल माना X-अक्ष पर बिन्दु $(x, 0)$ है।

प्रश्नानुसार, $(x, 0)$ तथा (7, 4) के बीच की दूरी $2\sqrt{5}$

$\sqrt{(7 \quad x)^2 \quad (\ 4 \quad 0)^2} \quad 2\sqrt{5}$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$49 \quad x^2 \quad 14x \quad 16 \quad 20$

$x^2 \quad 14x \quad 65 \quad 20 \quad 0$

$x^2 \quad 14x \quad 45 \quad 0$

$x^2 \quad (9 \quad 5)x \quad 45 \quad 0$

$x^2 \quad 9x \quad 5x \quad 45 \quad 0$

$$x(x \quad 9) \quad 5(x \quad 9) \quad 0$$
$$(x \quad 5)(x \quad 9) \quad 0$$

जब $x \quad 5 \quad 0$ तथा $x \quad 9 \quad 0$

$x \quad 5$ तथा $x \quad 9$

अत: बिन्दु $(5,0)$ या $(9,0)$ हैं।

8. यदि बिन्दुओं $(2, y)$ और $(\ 4, 3)$ के बीच की दूरी 10 मात्रक है, तो y का मान ज्ञात कीजिए।

हल प्रश्नानुसार, $(2, y)$ और $(\ 4, 3)$ के बीच की दूरी $\quad 10$

$$\sqrt{(2 \quad 4)^2 \quad (y \quad 3)^2} \quad 10$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$36 \quad y^2 \quad 9 \quad 6y \quad 100$$
$$y^2 \quad 6y \quad 45 \quad 100 \quad 0$$
$$y^2 \quad 6y \quad 55 \quad 0$$
$$y^2 \quad (11 \quad 5)y \quad 55 \quad 0$$
$$y^2 \quad 11y \quad 5y \quad 55 \quad 0$$
$$y(y \quad 11) \quad 5(y \quad 11) \quad 0$$
$$(y \quad 11)(y \quad 5) \quad 0$$

जब $y \quad 11 \quad 0$ तथा $y \quad 5 \quad 0$

$y \quad 11$ तथा $y \quad 5$

अत: y का मान 11 या $\quad 5$ है।

9. यदि कोई बिन्दु P बिन्दुओं $A(\ 7, \ 5)$ और $B(\ 9, \ 1)$ से समदूरस्थ है तथा उसका भुज उसकी कोटि के समान है, तो बिन्दु P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल माना बिन्दु P के निर्देशांक (k, k) है।

प्रश्नानुसार, $PA \quad PB$

$$\sqrt{(k \quad 7)^2 \quad (k \quad 5)^2} \quad \sqrt{(k \quad 9)^2 \quad (k \quad 1)^2}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$k^2 \quad 49 \quad 14k \quad k^2 \quad 25 \quad 10k$$
$$k^2 \quad 81 \quad 18k \quad k^2 \quad 1 \quad 2k$$
$$2k^2 \quad 24k \quad 74 \quad 2k^2 \quad 20k \quad 82$$
$$2k^2 \quad 24k \quad 74 \quad 2k^2 \quad 20k \quad 82 \quad 0$$
$$4k \quad 8 \quad 0$$
$$4k \quad 8$$
$$k \quad \frac{8}{4} \quad 2$$

अत: P के निर्देशांक $(2, 2)$ है।

10. दिखाइए कि बिन्दु $A(4, 7), B(0, 6), C(4, 5)$ और $D(8, 6)$ एक समचतुर्भुज के शीर्ष हैं।

हल भुजा $AB \quad \sqrt{(0 \quad 4)^2 \quad (6 \quad 7)^2}$

$$\sqrt{16 \quad 1} \quad \sqrt{17}$$

भुजा $BC \quad \sqrt{(4 \quad 0)^2 \quad (5 \quad 6)^2}$

$$\sqrt{16 \quad 1} \quad \sqrt{17}$$

भुजा $CD \quad \sqrt{(8 \quad 4)^2 \quad (6 \quad 5)^2}$

$$\sqrt{16 \quad 1} \quad \sqrt{17}$$

भुजा $DA \quad \sqrt{(8 \quad 4)^2 \quad (6 \quad 7)^2}$

$$\sqrt{16 \quad 1} \quad \sqrt{17}$$

विकर्ण $AC \quad \sqrt{(4 \quad 4)^2 \quad (5 \quad 7)^2}$

$$\sqrt{0 \quad 4} \quad 2$$

विकर्ण $BD \quad \sqrt{(8 \quad 0)^2 \quad (6 \quad 6)^2}$

$$\sqrt{64 \quad 0} \quad 8$$

$\because$ भुजा, $AB \quad BC \quad CD \quad DA$

तथा विकर्ण $AC \quad BD$

ये बिन्दु एक समचतुर्भुज के शीर्ष हैं।

11. दिखाइए कि बिन्दुओं $A(5, \ 1), B(\ 3, \ 2)$ तथा $C(1, 6)$ से बना त्रिभुज समद्विबाहु है।

हल बिन्दु $A(5, \ 1), B(\ 3, 2)$ तथा $C(1, 6)$ से बने त्रिभुज की भुजाएँ ज्ञात करने पर,

$$AB \quad \sqrt{(\ 3 \quad 5)^2 \quad (\ 2 \quad 1)^2} \quad \sqrt{64 \quad 1} \quad \sqrt{65}$$
$$BC \quad \sqrt{(1 \quad 3)^2 \quad (6 \quad 2)^2} \quad \sqrt{16 \quad 64} \quad \sqrt{80}$$
$$CA \quad \sqrt{(1 \quad 5)^2 \quad (6 \quad 1)^2} \quad \sqrt{16 \quad 49} \quad \sqrt{65}$$

$\because AB \quad CA$

अत: बिन्दु A, B तथा C से बना त्रिभुज समद्विबाहु है।

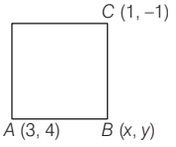
12. यदि एक वर्ग के दो विपरीत शीर्ष (3, 4) तथा (1, 1) हैं, तो वर्ग के अन्य शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल $\because$ दिए गए वर्ग के दो शीर्ष $(3, 4)$ तथा $(1, \ 1)$ हैं।

माना एक शीर्ष (x, y) है।

$\because \quad AB \quad BC$ [वर्ग की भुजा]

$$AB^2 \quad BC^2$$



$$(x \quad 3)^2 \quad (y \quad 4)^2 \quad (x \quad 1)^2 \quad (y \quad 1)^2$$
$$x^2 \quad 9 \quad 6x \quad y^2 \quad 16 \quad 8y \quad x^2 \quad 1 \quad 2x \quad y^2$$
$$1 \quad 2y$$
$$6x \quad 8y \quad 25 \quad 2x \quad 2y \quad 2$$
$$4x \quad 10y \quad 23 \quad 0$$
$$4x \quad 23 \quad 10y$$
$$x \quad \frac{23 \quad 10y}{4} \quad \ldots(i)$$

अब, $AC^2 \quad AB^2 \quad BC^2$

$(1 \quad 3)^2 \quad (\ 1 \quad 4)^2 \quad (x \quad 3)^2 \quad (y \quad 4)^2 \quad (x \quad 1)^2$

$(y \quad 1)^2$

$4 \quad 25 \quad x^2 \quad 9 \quad 6x \quad y^2 \quad 16 \quad 8y \quad x \quad 1 \quad 2x$

$y^2 \quad 1 \quad 2y$

$2x^2 \quad 2y^2 \quad 8x \quad 6y \quad 2 \quad 0$

$x^2 \quad y^2 \quad 4x \quad 3y \quad 1 \quad 0$ ...(ii)

समी (i) तथा (ii) से,

$$\frac{23 \quad 10y}{4}^2 \quad y^2 \quad 23 \quad 10y \quad 3y \quad 1 \quad 0$$

$$\frac{529 \quad 100y^2 \quad 460y}{16} \quad y^2 \quad 7y \quad 24 \quad 0$$

$529 \quad 100y^2 \quad 460y \quad 16y^2 \quad 112y \quad 384 \quad 0$

$116y^2 \quad 348y \quad 145 \quad 0$

[समीकरण को 29 से भाग देने पर]

$4y^2 \quad 12y \quad 5 \quad 0$

$4y^2 \quad (10 \quad 2)y \quad 5 \quad 0$

$4y^2 \quad 10y \quad 2y \quad 5 \quad 0$

$2y(2y \quad 5) \quad 1(2y \quad 5) \quad 0$

$(2y \quad 1)(2y \quad 5) \quad 0$

जब $2y \quad 1 \quad 0$ तथा $2y \quad 5 \quad 0$

$y \quad \frac{1}{2}$ तथा $y \quad \frac{5}{2}$

यदि $y \quad \frac{1}{2}$, तब $x \quad \frac{9}{2}$

यदि $y \quad \frac{5}{2}$, तब $x \quad \frac{1}{2}$

वर्ग के अन्य दो शीर्ष $\frac{9}{2}, \frac{1}{2}$ तथा $\frac{1}{2}, \frac{5}{2}$ हैं।

13. यदि बिन्दु $P(3, 4)$ बिन्दुओं $A(a \quad b, b \quad a)$ और $B(a \quad b, a \quad b)$ से समदूरस्थ है, तो सिद्ध कीजिए कि $3b \quad 4a \quad 0$

हल प्रश्नानुसार, $PA \quad PB$

$$\sqrt{(a \quad b \quad 3)^2 \quad (b \quad a \quad 4)^2} \quad \sqrt{(a \quad b \quad 3)^2 \quad (a \quad b \quad 4)^2}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$(a \quad b)^2 \quad 9 \quad 6(a \quad b) \quad (b \quad a)^2$

$16 \quad 8(b \quad a) \quad (a \quad b)^2 \quad 9 \quad 6(a \quad b)$

$(a \quad b)^2 \quad 16 \quad 8(a \quad b)$

$6(a \quad b) \quad 8(b \quad a) \quad 6(a \quad b) \quad 8(a \quad b)$

[समान व्यंजकों को दोनों पक्षों से हटाने पर]

$6a \quad 6b \quad 8b \quad 8a \quad 6a \quad 6b \quad 8a \quad 8b$

$6a \quad 6b \quad 8b \quad 8a \quad 6a \quad 6b \quad 8a \quad 8b \quad 0$

$16a \quad 12b \quad 0$

$3b \quad 4a \quad 0$ [4 से भाग देने पर]

इति सिद्धम्

14. यदि बिन्दु $A(x, y)$ बिन्दुओं $B(2, \quad 3)$ तथा $C(\ 4, 5)$ से समदूरस्थ है, तो सिद्ध कीजिए $3x \quad 4y \quad 7 \quad 0$

हल प्रश्नानुसार, $AB \quad AC$

$$\sqrt{(x \quad 2)^2 \quad (y \quad 3)^2} \quad \sqrt{(x \quad 4)^2 \quad (y \quad 5)^2}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$x^2 \quad 4 \quad 4x \quad y^2 \quad 9 \quad 6y \quad x^2 \quad 16 \quad 8x \quad y^2$

$25 \quad 10y$

$4x \quad 6y \quad 13 \quad 8x \quad 10y \quad 41$

$4x \quad 6y \quad 13 \quad 8x \quad 10y \quad 41 \quad 0$

$12x \quad 16y \quad 28 \quad 0$

$3x \quad 4y \quad 7 \quad 0$ [4 से भाग देने पर]

इति सिद्धम्

15. यदि एक समबाहु त्रिभुज के दो बिन्दु $(0, 0)$ और $(3, \sqrt{3})$ हैं, तब तीसरा बिन्दु ज्ञात कीजिए।

हल माना तीसरा बिन्दु $C(x, y)$ है तथा पहले दो बिन्दु $A(0, 0)$ एवं $B(3, \sqrt{3})$ हैं।

$\because$ त्रिभुज एक समबाहु त्रिभुज है।

$AB \quad BC \quad CA$

जब, $AB \quad BC$

$$\sqrt{(3 \quad 0)^2 \quad (\sqrt{3} \quad 0)^2} \quad \sqrt{(x \quad 3)^2 \quad (y \quad \sqrt{3})^2}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$9 \quad 3 \quad x^2 \quad 9 \quad 6x \quad y^2 \quad 3 \quad 2\sqrt{3}y$

$12 \quad x^2 \quad y^2 \quad 6x \quad 2\sqrt{3}y \quad 12$

$x^2 \quad y^2 \quad 6x \quad 2\sqrt{3}y \quad 0$ ...(i)

जब $AB \quad CA$, तब

$$\sqrt{(3 \quad 0)^2 \quad (\sqrt{3} \quad 0)^2} \quad \sqrt{(x \quad 0)^2 \quad (y \quad 0)^2}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$9 \quad 3 \quad x^2 \quad y^2$

$x^2 \quad y^2 \quad 12$ ...(ii)

समी (i) तथा (ii) से,

$12 \quad 6x \quad 2\sqrt{3}y \quad 0$

$2\sqrt{3}y \quad 12 \quad 6x$

$y \quad \frac{6(2 \quad x)}{2\sqrt{3}}$

$y \quad \frac{3(2 \quad x)}{\sqrt{3}}$

पुन: समी (ii) से,

$$x^2 \quad \frac{9(2 \quad x)^2}{3} \quad 12$$

$$x^2 \quad 3(4 \quad x^2 \quad 4x) \quad 12$$

$$x^2 \quad 3x^2 \quad 12x \quad 12 \quad 12$$

$$4x^2 \quad 12x \quad 0$$

$$4x(x \quad 3) \quad 0$$

$$x \quad 0 \text{ तथा } x \quad 3$$

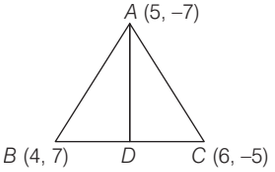
यदि $x \quad 0$, तब $y \quad 2\sqrt{3}$ तथा बिन्दु $(0, 2\sqrt{3})$

यदि $x \quad 3$, तब $y \quad \sqrt{3}$ तथा बिन्दु $(3, \sqrt{3})$

अत: तीसरा बिन्दु $(0, 2\sqrt{3})$ या $(3, \quad \sqrt{3})$ है।

प्रश्नावली 7.3

1. निम्नलिखित चित्र में, AD त्रिभुज की माध्यिका है, तब D के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।



हल $\because$ AD माध्यिका है।

D, BC का मध्य-बिन्दु है।

यहाँ, $B \quad (4, 7), C \quad (6, \quad 5)$

D के निर्देशांक,

$$x \quad \frac{x_1 \quad x_2}{2} \quad \frac{4 \quad 6}{2} \quad \frac{10}{2} \quad 5$$

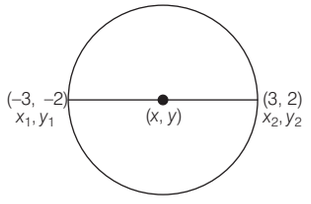
तथा $$y \quad \frac{y_1 \quad y_2}{2} \quad \frac{7 \quad 5}{2} \quad \frac{2}{2} \quad 1$$

अत: D के निर्देशांक $(5, 1)$ हैं।

2. उस वृत्त का केन्द्र ज्ञात कीजिए, जिसके व्यास के सिरों के निर्देशांक $(\ 3, \quad 2)$ और $(3, 2)$ हैं।

हल वृत्त का केन्द्र व्यास का मध्य-बिन्दु होता है।

माना केन्द्र के निर्देशांक (x, y) हैं।

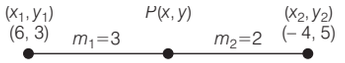


$$x \quad \frac{x_1 \quad x_2}{2} \quad \frac{3 \quad 3}{2} \quad 021$$

तथा $$y \quad \frac{y_1 \quad y_2}{2} \quad \frac{2 \quad 2}{2} \quad 0$$

अत: वृत्त का केन्द्र $(0, 0)$ है।

3. बिन्दु $(6, 3)$ और $(\ 4, 5)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को $3 : 2$ अनुपात में अन्तः विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।



हल माना अन्त: विभाजित करने वाले बिन्दु P के निर्देशांक (x, y) हैं।

$$x \quad \frac{m_1x_2 \quad m_2x_1}{m_1 \quad m_2} \quad \frac{3(\ 4) \quad 2(6)}{3 \quad 2}$$

$$\frac{12 \quad 12}{5} \quad 0$$

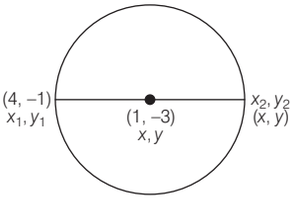
तथा y $$\frac{m_1y_2 \quad m_2y_1}{m_1 \quad m_2} \quad \frac{3(5) \quad 2(3)}{3 \quad 2}$$

$$\frac{15 \quad 6}{5} \quad \frac{21}{5}$$

अत: अभीष्ट बिन्दु के निर्देशांक $0, \frac{21}{5}$ हैं।

4. किसी वृत्त के एक व्यास के एक छोर के निर्देशांक $(4, \quad 1)$ हैं तथा वृत्त के केन्द्र के निर्देशांक $(1, \quad 3)$ हैं, तो व्यास के दूसरे छोर के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल माना दूसरे छोर के निर्देशांक (x, y) हैं।



$\because$ वृत्त का केन्द्र व्यास का मध्य-बिन्दु होता है।

$$x \quad \frac{x_1 \quad x_2}{2}$$

$$1 \quad \frac{4 \quad x}{2}$$

$$2 \quad 4 \quad x$$

$$x \quad 2 \quad 4 \quad 2$$

तथा $$y \quad \frac{y_1 \quad y_2}{2}$$

$$3 \quad \frac{1 \quad y}{2}$$

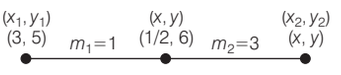
$$6 \quad 1 \quad y$$

$$y \quad 6 \quad 1 \quad 5$$

अत: दूसरे सिरे के निर्देशांक $(\ 2, \quad 5)$ हैं।

5. बिन्दु C के निर्देशांक ज्ञात कीजिए यदि $B \ \frac{1}{2}, 6$ बिन्दुओं $A(3, 5)$ और C को मिलाने वाले रेखाखण्ड को $1 : 3$ के अनुपात में विभाजित करता है।

हल माना C के निर्देशांक (x, y) हैं।



$\because$ अन्त: विभाजन बिन्दु B के निर्देशांक $\frac{1}{2}, 6$ हैं।

$$x \quad \frac{m_1x_2 \quad m_2x_1}{m_1 \quad m_2}$$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{(1)(x) \quad (3)(3)}{1 \quad 3}$$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{x \quad 9}{4}$$

$$\frac{4}{2} \quad x \quad 9$$

$$2 \quad x \quad 9$$

$$x \quad 2 \quad 9 \quad 7$$

तथा $$y \quad \frac{m_1y_2 \quad m_2y_1}{m_1 \quad m_2}$$

$$6 \quad \frac{(1)(y) \quad (3)(5)}{1 \quad 3}$$

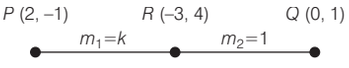
$$24 \quad y \quad 15$$

$$y \quad 24 \quad 15 \quad 9$$

अत: बिन्दु C के निर्देशांक $(\ 7, 9)$ हैं।

6. विभाजन सूत्र का प्रयोग करके दर्शाइए कि बिन्दु $P(2, \ 1)$, $Q(0, 1)$ और $R(\ 3, 4)$ संरेखीय हैं।

हल माना बिन्दु $R(\ 3, 4)$, PQ को $k:1$ में विभाजित करता है।



R के निर्देशांक,

$$x \quad \frac{m_1x_2 \quad m_2x_1}{m_1 \quad m_2}$$

तथा $$y \quad \frac{m_1y_2 \quad m_2y_1}{m_1 \quad m_2}$$

$$3 \quad \frac{k \ 0 \quad 1(2)}{k \quad 1}$$

तथा $$4 \quad \frac{(k)(1) \quad (1)(\ 1)}{k \quad 1}$$

$$3k \quad 3 \quad 2 \text{ तथा } 4k \quad 4 \quad k \quad 1$$

$$3k \quad 2 \quad 3 \text{ तथा } 4k \quad k \quad 1 \quad 4$$

$$k \quad \frac{5}{3} \quad \text{तथा} \quad 3k \quad 5$$

$$k \quad \frac{5}{3}$$

$\because k$ के मान बराबर हैं।

अत: बिन्दु P, Q तथा R संरेखीय हैं।

7. विभाजन सूत्र का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (2, 2), (3, 8) और (1, 4) संरेखीय हैं।

हल प्रश्न संख्या 6 की भाँति करें।

8. यदि (1, 5), $(P, 1)$ और (4, 11) संरेखीय हैं, तो P का मान ज्ञात कीजिए।

हल माना बिन्दु $(4, 11)$, बिन्दु $(1, 5)$ तथा $(P, 1)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को $k:1$ में विभाजित करता है।

तब, $$4 \quad \frac{(k)P \quad (1)(1)}{k \quad 1}$$

तथा $$11 \quad \frac{(k)(1) \quad (1)(5)}{k \quad 1}$$

$$4k \quad 4 \quad k \quad P \quad 1$$

तथा $$11k \quad 11 \quad k \quad 5$$

$$4k \quad k \quad P \quad 1 \quad 4$$

तथा $$11k \quad k \quad 5 \quad 11$$

$$k(4 \quad P) \quad 3$$

तथा $$10k \quad 6$$

$$k \quad \frac{3}{4 \quad P}$$

तथा $$k \quad \frac{6}{10} \qquad k \quad \frac{3}{5}$$

$\because$ ये बिन्दु संरेखीय हैं।

k के मान बराबर होंगे।

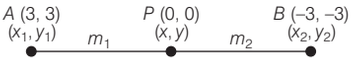
$$\frac{3}{4 \quad P} \quad \frac{3}{5} \qquad 4 \quad P \quad 5$$

$$P \quad 5 \quad 4$$

$$P \quad 1 \qquad P \qquad 1$$

9. बिन्दुओं $A(3, 3)$ और $B(\ 3, \ 3)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को बिन्दु $P(0, 0)$ किस अनुपात में विभाजित करता है?

हल माना बिन्दु $P(0, 0)$ रेखाखण्ड AB को $m_1 : m_2$ में विभाजित करता है।



$$x \quad \frac{m_1x_2 \quad m_2x_1}{m_1 \quad m_2}$$

$$0 \quad \frac{m_1(\ 3) \quad m_2(3)}{m_1 \quad m_2}$$

$$0 \qquad 3m_1 \quad 3m_2$$

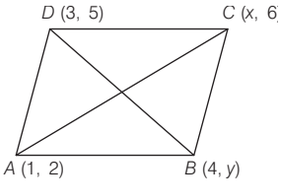
$$3m_1 \quad 3m_2 \qquad m_1 \quad m_2$$

$$\frac{m_1}{m_2} \quad \frac{}{1} \qquad m_1 : m_2 \quad 1:1$$

अत: बिन्दु रेखाखण्ड को 1 : 1 में विभाजित करता है।

10. यदि बिन्दु (1, 2), (4, y), (x, 6) तथा (3, 5) एक समान्तर चतुर्भुज के इसी क्रम में शीर्ष हों, तो x और y के मान ज्ञात कीजिए।

हल ∵ समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण समद्विभाजित करते हैं।



विकर्ण AC के मध्य-बिन्दु के निर्देशांक,

$$X \quad \frac{1 \quad x}{2} \quad \text{तथा} \quad Y \quad \frac{2 \quad 6}{2} \quad 4$$

विकर्ण BD के मध्य-बिन्दु के निर्देशांक,

$$X \quad \frac{3 \quad 4}{2} \quad \frac{7}{2} \quad \text{तथा} \quad Y \quad \frac{5 \quad y}{2}$$

∵ ये बिन्दु समान होंगे।

$$\frac{1 \quad x}{2} \quad \frac{7}{2} \text{ तथा } 4 \quad \frac{5 \quad y}{2}$$

$$1 \quad x \quad 7 \text{ तथा } 8 \quad 5 \quad y$$

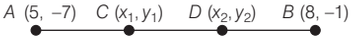
$$x \quad 7 \quad 1 \text{ तथा } y \quad 8 \quad 5$$

$$x \quad 6 \text{ तथा } y \quad 3$$

अत: $x \quad 6, y \quad 3$ हैं।

11. बिन्दु (5, 7) तथा (8, 1) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को समत्रिभाजित करने वाले बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल माना बिन्दु C तथा D रेखाखण्ड को समत्रिभाजित करते हैं।



बिन्दु C, AB को 1 : 2 में विभाजित करेगा।

$$x_1 \quad \frac{1(8) \quad 2(5)}{1 \quad 2}$$

$$\text{तथा} \qquad y_1 \quad \frac{1(\ 1) \quad 2(\ 7)}{1 \quad 2}$$

$$x_1 \quad \frac{8 \quad 10}{3}$$

$$\text{तथा} \qquad y_1 \quad \frac{1 \quad 14}{3}$$

$$x_1 \quad 6 \text{ तथा } y_1 \quad \frac{15}{3} \quad 5$$

C के निर्देशांक (6, 5)

∵ बिन्दु D, AB को 2 : 1 में विभाजित करेगा।

$$x_2 \quad \frac{2(8) \quad 1(5)}{2 \quad 1}$$

$$\text{तथा} \qquad y_2 \quad \frac{2(\ 1) \quad 1(\ 7)}{2 \quad 1}$$

$$x_2 \quad \frac{16 \quad 5}{3}$$

$$\text{तथा} \qquad y_2 \quad \frac{2 \quad 7}{3}$$

$$x_2 \quad 7$$

$$\text{तथा} \qquad y_2 \quad \frac{9}{3} \quad 3$$

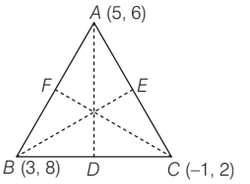
D के निर्देशांक (7, 3)

अत: अभीष्ट बिन्दु (6, 5) और (7, 3) हैं।

12. त्रिभुज की माध्यिका की लम्बाई ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (5, 6), (3, 8) तथा (1, 2) हैं।

हल माना $A \quad (5, 6), B \quad (3, 8), C \quad (\ 1, 2)$

पुन: माना D, E तथा F क्रमश: BC, CA तथा AB के मध्य-बिन्दु हैं।



D के निर्देशांक, $x \quad \frac{3 \quad 1}{2} \quad \frac{2}{2} \quad 1$

$$\text{तथा} \qquad y \quad \frac{8 \quad 2}{2} \quad \frac{10}{2} \quad 5$$

$$\because x \quad \frac{x_1 \quad x_2}{2}, y \quad \frac{y_1 \quad y_2}{2}$$

D के निर्देशांक (1, 5)

AD की लम्बाई $\sqrt{(5 \quad 1)^2 \quad (6 \quad 5)^2}$

$$\because d \quad \sqrt{(x_2 \quad x_1)^2 \quad (y_2 \quad y_1)^2}]$$

$$\sqrt{16 \quad 1} \quad \sqrt{17}$$

E के निर्देशांक, $x \quad \frac{1 \quad 5}{2} \quad \frac{4}{2} \quad 2$

$$\text{तथा} \qquad y \quad \frac{2 \quad 6}{2} \quad \frac{8}{2} \quad 4$$

E के निर्देशांक (2, 4)

BE की लम्बाई $\sqrt{(3 \quad 2)^2 \quad (8 \quad 4)^2}$

$$\sqrt{1 \quad 16} \quad \sqrt{17}$$

F के निर्देशांक, $x \quad \frac{3 \quad 5}{2} \quad \frac{8}{2} \quad 4$

$$\text{तथा} \qquad y \quad \frac{8 \quad 6}{2} \quad \frac{14}{2} \quad 7$$

F के निर्देशांक $(4, 7)$

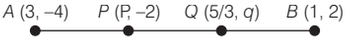
CF की लम्बाई $\sqrt{(1\ \ 4)^2\ \ (2\ \ 7)^2}$

$\sqrt{25\ \ 25}\ \ \sqrt{50}\ \ 5\sqrt{2}$

अत: माध्यिकाओं की लम्बाई $\sqrt{17}, \sqrt{17}, 5\sqrt{2}$ है।

13. बिन्दुओं (3, 4) तथा (1, 2) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को बिन्दु P तथा Q तीन समान भागों में बाँटते हैं। यदि P तथा Q के निर्देशांक $(p, 2)$ तथा $\frac{5}{3}, q$ हैं, तो p तथा q के मान ज्ञात कीजिए।

हल प्रश्नानुसार, बिन्दु P, AB को $1 : 2$ में विभाजित करेगा।



अन्त: विभाजन के निर्देशांक

$$x\ \ \frac{m_1x_2\ \ m_2x_1}{m_1\ \ m_2},$$

$$P\ \ \frac{1(1)\ \ 2(3)}{1\ \ 2}\ \ \frac{1\ \ 6}{3}\ \ \frac{7}{3}$$

तथा बिन्दु Q, AB को $2 : 1$ में विभाजित करेगा।

$$y\ \ \frac{m_1y_2\ \ m_2y_1}{m_1\ \ m_2}$$

$$q\ \ \frac{2(2)\ \ 1(\ 4)}{2\ \ 1}$$

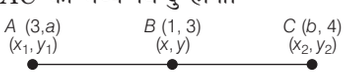
$$q\ \ \frac{4\ \ 4}{3}\ \ 0$$

अत: $p\ \ \frac{7}{3}$ तथा $q\ \ 0$ है।

14. बिन्दु A, B और C संरेखीय हैं तथा $AB\ \ BC$ यदि A, B और C के निर्देशांक क्रमशः $(3, a)$, $(1, 3)$ और $(b, 4)$ हैं, तब a और b का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $A(3, a), B(1, 3), C(b, 4)$ संरेखीय हैं। साथ ही, $AB\ \ BC$

बिन्दु B, AC का मध्य-बिन्दु होगा।



अब, मध्य-बिन्दु के निर्देशांक, $X\ \ \frac{x_1\ \ x_2}{2}$

$$1\ \ \frac{3\ \ b}{2}\qquad 2\ \ 3\ \ b$$

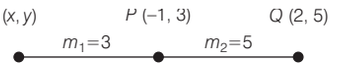
$$b\ \ 2\ \ 3\qquad b\ \ \ 1$$

तथा $\quad Y\ \ \frac{y_1\ \ y_2}{2}\ \ 3\ \ \frac{a\ \ 4}{2}$

$$6\ \ a\ \ 4\qquad a\ \ 6\ \ 4\ \ 2$$

15. बिन्दु R के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $P(\ 1, 3)$ और $Q(2, 5)$ को मिलाने वाली रेखा पर स्थित है, जबकि $PR\ \ \frac{3}{5}PQ$

हल माना R के निर्देशांक (x, y) हैं।



प्रश्नानुसार, $PR\ \ \frac{3}{5}PQ$

$$\frac{PR}{PQ}\ \ \frac{3}{5}\qquad PR:PQ\ \ \ 3:5$$

बिन्दु P, RQ को $3 : 5$ में अन्त: विभाजित करता है।

P के निर्देशांक, $x\ \ \frac{m_1x_2\ \ m_2x_1}{m_1\ \ m_2}$

$$1\ \ \frac{3(2)\ \ 5x}{3\ \ 5}$$

$$8\ \ 6\ \ 5x$$

$$8\ \ 6\ \ 5x$$

$$x\ \ \frac{14}{5}$$

तथा $\quad y\ \ \frac{m_1y_2\ \ m_2y_1}{m_1\ \ m_2}$

$$3\ \ \frac{3(5)\ \ 5y}{3\ \ 5}$$

$$24\ \ 15\ \ 5y$$

$$24\ \ 15\ \ 5y$$

$$5y\ \ 9\qquad y\ \ \frac{9}{5}$$

अत: बिन्दु R के निर्देशांक $\frac{14}{5}, \frac{9}{5}$ हैं।

❐❐❐

8

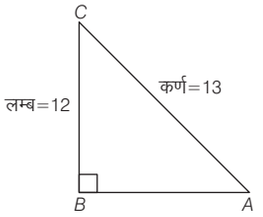
त्रिकोणमिति का परिचय

प्रश्नावली 8.1

1. यदि $\sin A = \frac{12}{13}$, तब $\cos A$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $\sin A = \frac{12}{13} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$

लम्ब $= 12$, कर्ण $= 13$



ABC में, $B = 90$

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$(13)^2 = AB^2 + (12)^2$

$169 = 144 + AB^2$

$AB^2 = 25$

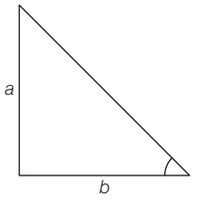
$AB = 5$ (आधार)

अब, $\cos A = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC}$

$\cos A = \frac{5}{13}$

2. यदि $\tan = \frac{a}{b}$, तब sec का मान क्या होगा?

हल दिया है, $\tan = \frac{a}{b} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$



पाइथागोरस प्रमेय से,

$(\text{कर्ण})^2 = (\text{लम्ब})^2 + (\text{आधार})^2$

$(\text{कर्ण})^2 = a^2 + b^2$

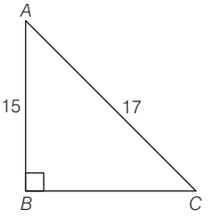
$\text{कर्ण} = \sqrt{a^2 + b^2}$

अब, $\sec = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}$

$\sec = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b}$

3. यदि $\sin C = \frac{15}{17}$, तब $\sin A$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $\sin C = \frac{15}{17} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$



ABC में, $B = 90$

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$(17)^2 = (15)^2 + BC^2$

$289 = 225 + BC^2$

$BC^2 = 289 - 225$

$BC^2 = 64$

$BC = \sqrt{64} = 8$

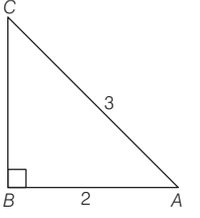
अब, $\sin A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC}$

$\sin A = \frac{8}{17}$

4. एक ABC में, $B = 90$ है। यदि $AB = 2$ और $AC = 3$ सेमी है, तब $\sin A$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, ABC में, $B = 90$

तथा $AB = 2$ सेमी, $AC = 3$ सेमी

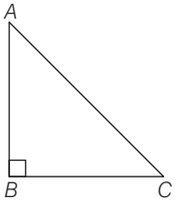


$$AC^2 \quad AB^2 \quad BC^2$$
$$(3)^2 \quad (2)^2 \quad BC^2$$
$$9 \quad 4 \quad BC^2$$
$$BC^2 \quad 9 \quad 4$$
$$BC \quad \sqrt{5}$$

अब, $\sin A \quad \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} \quad \frac{BC}{AC}$

$$\sin A \quad \frac{\sqrt{5}}{3}$$

5. दिए गए चित्र में ABC एक समकोण त्रिभुज है और $\tan A \quad \frac{4}{3}$ है, तब AC का मान ज्ञात कीजिए।



हल दिया है, $\tan A \quad \frac{4}{3} \quad \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$

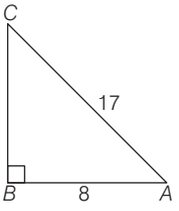
यहाँ, लम्ब $(BC) \quad 4$, आधार $(AB) \quad 3$

ABC मे, $AC^2 \quad AB^2 \quad BC^2$
$$AC^2 \quad (3)^2 \quad (4)^2$$
$$AC^2 \quad 9 \quad 16$$
$$AC^2 \quad 25$$
$$AC \quad \sqrt{25}$$
$$AC \quad 5$$

6. यदि $17 \cos A \quad 8$, तब $15 \operatorname{cosec} A \quad 8 \sec A$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $17 \cos A \quad 8$

$$\cos A \quad \frac{8}{17} \quad \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$$



आधार $(AB) \quad 8$, कर्ण $(AC) \quad 17$

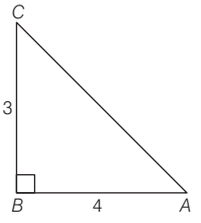
ABC में, $B \quad 90$
$$AC^2 \quad AB^2 \quad BC^2$$
$$(17)^2 \quad (8)^2 \quad BC^2$$
$$289 \quad 64 \quad BC^2$$
$$BC^2 \quad 225$$
$$BC \quad \sqrt{225}$$
$$BC \quad 15$$
$\operatorname{cosec} A \quad \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} \quad \frac{AC}{BC} \quad \frac{17}{15}$

तथा $\sec A \quad \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} \quad \frac{AC}{AB} \quad \frac{17}{8}$

अब, $15 \operatorname{cosec} A \quad 8 \sec A \quad 15 \quad \frac{17}{15} \quad 8 \quad \frac{17}{8}$
$$17 \quad 17 \quad 0$$

7. यदि $\tan A \quad \frac{3}{4}$, तब दिखाइए कि $\sin A \cos A \quad \frac{12}{25}$

हल दिया है, $\tan A \quad \frac{3}{4} \quad \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} \quad \frac{BC}{AB}$



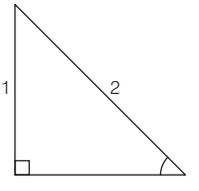
ABC में, $B \quad 90$
$$AC^2 \quad BC^2 \quad AB^2$$
$$AC \quad \sqrt{9 \quad 16} \quad \sqrt{25} \quad 5$$
$\sin A \quad \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} \quad \frac{BC}{AC} \quad \frac{3}{5}$

तथा $\cos A \quad \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} \quad \frac{AB}{AC} \quad \frac{4}{5}$

अब, बायाँ पक्ष $\sin A \cos A$
$$\frac{3}{5} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{12}{25}$$
दायाँ पक्ष

8. यदि $\sin \quad \frac{1}{2}$ और एक न्यून कोण है, तब $(3 \cos \quad 4 \cos^3 \quad)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\because \sin \quad \frac{1}{2} \quad \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$ [दिया है]



पाइथागोरस प्रमेय से

आधार $\sqrt{(\text{कर्ण})^2 \quad (\text{लम्ब})^2}$
$$\sqrt{4 \quad 1} \quad \sqrt{3}$$

$$\cos \quad \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$$

अब, $3\cos \quad 4\cos^3 \quad 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \frac{4 \quad 3\sqrt{3}}{8}$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad 0$$

9. यदि $\cos \quad \frac{2}{3}$, तब $2\sec^2 \quad 2\tan^2 \quad 9$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $\cos \quad \frac{2}{3} \quad \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$

पाइथागोरस प्रमेय से,

$$\text{लम्ब} \quad \sqrt{(\text{कर्ण})^2 \quad (\text{आधार})^2}$$

$$\sqrt{(3)^2 \quad (2)^2} \quad \sqrt{9 \quad 4} \quad \sqrt{5}$$

$$\sec \quad \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} \quad \frac{3}{2}$$

तथा $\tan \quad \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} \quad \frac{\sqrt{5}}{2}$

अब, $2\sec^2 \quad 2\tan^2 \quad 9 \quad 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 \quad 2\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \quad 9$

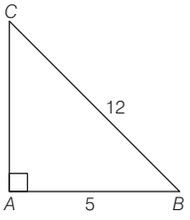
$$\frac{9}{2} \quad \frac{5}{2} \quad 9$$

$$7 \quad 9 \quad 2$$

10. ABC में A समकोण है, जिसमें AB 5 सेमी और BC 12 सेमी है, तब $\sin B$, $\cos C$ और $\tan B$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, ABC में, $A \quad 90^\circ$,

$AB \quad 5, BC \quad 12$



ABC में, $BC^2 \quad AC^2 \quad AB^2$

$144 \quad AC^2 \quad 25$

$AC^2 \quad 144 \quad 25$

$AC \quad \sqrt{119}$

अब, $\sin B \quad \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} \quad \frac{AC}{BC} \quad \frac{\sqrt{119}}{12}$

तथा $\cos C \quad \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} \quad \frac{AC}{BC} \quad \frac{\sqrt{119}}{12}$

11. दिया है, $\sin A \quad \frac{3}{5}$, तब A के अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल प्रश्नानुसार, $\sin A \quad \frac{3}{5} \quad \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$

यहाँ, लम्ब $\quad 3$ तथा कर्ण $\quad 5$

पाइथागोरस प्रमेय से,

$$\text{आधार} \quad \sqrt{(\text{कर्ण})^2 \quad (\text{लम्ब})^2}$$

$$\sqrt{(5)^2 \quad (3)^2}$$

$$\sqrt{25 \quad 9} \quad \sqrt{16} \quad 4$$

अब, $\cos A \quad \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} \quad \frac{4}{5}$

$$\tan A \quad \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} \quad \frac{3}{4}$$

$$\cot A \quad \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} \quad \frac{4}{3}$$

$$\sec A \quad \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} \quad \frac{5}{4}$$

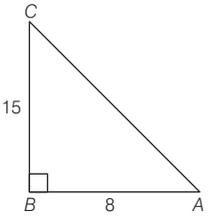
तथा $\operatorname{cosec} A \quad \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} \quad \frac{5}{3}$

12. दिया है, $15\cot A \quad 8$, तब A के अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $15\cot A \quad 8$

$$\cot A \quad \frac{8}{15} \quad \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}}$$

ABC में $\quad B = 90^\circ$



$AC^2 \quad AB^2 \quad BC^2$

$AC^2 \quad 64 \quad 225$

$AC \quad \sqrt{289}$

$AC \quad 17\,(\text{कर्ण})$

अब, $\sin A \quad \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} \quad \frac{15}{17}$

$$\cos A \quad \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} \quad \frac{8}{17}$$

$$\tan A \quad \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} \quad \frac{15}{8}$$

$$\sec A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{17}{8}$$

तथा $$\text{cosec } A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \frac{17}{15}$$

13. यदि $\tan = \frac{4}{3}$, तब $\frac{\sin - \cos}{\sin + \cos}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $\tan = \frac{4}{3} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$

लम्ब $= 4$, आधार $= 3$

पाइथागोरस प्रमेय से,

$$(\text{कर्ण})^2 = (\text{लम्ब})^2 + (\text{आधार})^2$$

$$\text{कर्ण} = \sqrt{(4)^2 + (3)^2}$$

$$\sqrt{16 + 9} = \sqrt{125} = 5$$

$$\sin = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{4}{5}$$

तथा $$\cos = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{3}{5}$$

अब, $$\frac{\sin - \cos}{\sin + \cos} = \frac{\frac{4}{5} - \frac{3}{5}}{\frac{4}{5} + \frac{3}{5}} = \frac{7/5}{1/5} = 7$$

14. यदि $5 \tan = 4$, तब $\frac{5 \sin - 3 \cos}{5 \sin + 2 \cos} = \frac{1}{6}$

हल दिया है, $5 \tan = 4$

$$\tan = \frac{4}{5} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$$

लम्ब $= 4$, आधार $= 5$

अब, $$\text{कर्ण} = \sqrt{(\text{लम्ब})^2 + (\text{आधार})^2}$$

$$\sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$$

$$\sin = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{4}{\sqrt{41}}$$

तथा $$\cos = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{5}{\sqrt{41}}$$

बायाँ पक्ष $$= \frac{5 \sin - 3 \cos}{5 \sin + 2 \cos}$$

$$= \frac{5 \cdot \frac{4}{\sqrt{41}} - 3 \cdot \frac{5}{\sqrt{41}}}{5 \cdot \frac{4}{\sqrt{41}} + \frac{2 \cdot 5}{\sqrt{41}}}$$

$$= \frac{\frac{20}{\sqrt{41}} - \frac{15}{\sqrt{41}}}{\frac{20}{\sqrt{41}} + \frac{10}{\sqrt{41}}} = \frac{\frac{5}{\sqrt{41}}}{\frac{30}{\sqrt{41}}}$$

$$= \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$ दायाँ पक्ष

15. यदि $3 \tan A = 4$, तब सिद्ध कीजिए कि

(i) $$\sqrt{\frac{\sec A - \text{cosec } A}{\sec A + \text{cosec } A}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

(ii) $$\sqrt{\frac{1 - \sin A}{1 + \cos A}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

हल दिया है, $3 \tan A = 4$

$$\tan A = \frac{4}{3} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$$

लम्ब $= 4$, आधार $= 3$

पाइथागोरस प्रमेय से,

$$\text{कर्ण} = \sqrt{(\text{लम्ब})^2 + (\text{आधार})^2}$$

$$\sqrt{(4)^2 + (3)^2}$$

$$\sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sec A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{5}{3}, \cos A = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{cosec } A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \frac{5}{4}, \sin A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{4}{5}$$

(i) बायाँ पक्ष $$\sqrt{\frac{\sec A - \text{cosec } A}{\sec A + \text{cosec } A}}$$

$$\sqrt{\frac{\frac{5}{3} - \frac{5}{4}}{\frac{5}{3} + \frac{5}{4}}}$$ [मान रखने पर]

$$\sqrt{\frac{\frac{20 - 15}{12}}{\frac{20 + 15}{12}}}$$ [ल.स. लेने पर]

$$\sqrt{\frac{5}{35}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$$ दायाँ पक्ष

(ii) बायाँ पक्ष $$\sqrt{\frac{1 - \sin A}{1 + \cos A}} \quad \sqrt{\frac{1 - \frac{4}{5}}{1 + \frac{3}{5}}}$$

$$\sqrt{\frac{\frac{1}{5}}{\frac{8}{5}}} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$ दायाँ पक्ष

16. यदि $\sqrt{3} \sin = \cos$, तब $\frac{\sin + \tan - \cot}{\sin + \cos}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $\sqrt{3} \sin = \cos$

$$\frac{\sin}{\cos} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$$

लम्ब $\quad 1$, आधार $\quad \sqrt{3}$

पाइथागोरस प्रमेय से,

$$\text{कर्ण} \quad \sqrt{(\text{लम्ब})^2 \quad (\text{आधार})^2}$$

$$\sqrt{(1)^2 \quad (\sqrt{3})^2}$$

$$\sqrt{1 \quad 3} \quad \sqrt{4} \quad 2$$

$$\sin \quad \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} \quad \frac{1}{2}$$

$$\cos \quad \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \quad \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos t \quad \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} \quad \frac{\sqrt{3}}{1}$$

अब, $\dfrac{\sin \quad \tan \qquad \cot \ )}{\sin \quad \cos} \quad \dfrac{\frac{1}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{3}}(1 \quad \sqrt{3})}{\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}}$

$$\frac{\frac{1}{2\sqrt{3}}(1 \quad \sqrt{3})}{\frac{1 \quad \sqrt{3}}{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}}$$

17. सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{\sec^2 \quad \sin^2}{\tan^2} \quad \text{cosec}^2 \quad \cos^2$

हल बायाँ पक्ष $\dfrac{\sec^2 \quad \sin^2}{\tan^2}$

$$\frac{\frac{1}{\cos^2} \quad \sin^2}{\frac{\sin^2}{\cos^2}} \quad [\sin \quad \cos \quad \text{के पदों में लिखने पर}]$$

$$\frac{1 \quad \sin^2 \quad \cos^2}{\sin^2}$$

$$\frac{1}{\sin^2} \quad \frac{\sin^2 \quad \cos^2}{\sin^2}$$

$$\text{cosec}^2 \quad \cos^2 \quad \text{दायाँ पक्ष}$$

18. सिद्ध कीजिए कि $(1 \quad \tan A \quad \cot A)(\sin A \quad \cos A)$
$\sin A \tan A \quad \cot A \cos A$

हल बायाँ पक्ष $(1 \quad \tan A \quad \cot A)(\sin A \quad \cos A)$

$$1 \quad \frac{\sin A}{\cos A} \quad \frac{\cos A}{\sin A} \ (\sin A \quad \cos A)$$

$$\frac{(\cos A \sin A \quad \sin^2 A \quad \cos^2 A)}{\cos A \sin A}$$

$$(\sin A \quad \cos A)$$

$$\frac{\sin^3 A \quad \cos^3 A}{\cos A \sin A} \quad [\because a^3 \quad b^3 \quad (a \quad b)(a^2 \quad b^2 \quad ab)]$$

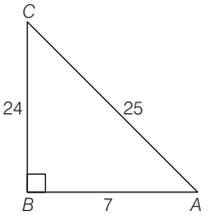
$$\frac{\sin^2 A}{\cos A} \quad \frac{\cos^2 A}{\sin A}$$

$\sin A \tan A \quad \cot A \cos A$

दायाँ पक्ष

19. *ABC* में, *B* समकोण है। यदि *AC* *BC* 49 सेमी और *AB* 7 सेमी है, तब $\sin A$, $\cos A$, $\tan C$ और $\sec C$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल *ABC* में, *B* 90 , *AC* *BC* 49, *AB* 7



$$AC^2 \quad BC^2 \quad AB^2$$

$$(49 \quad BC)^2 \quad BC^2 \quad (7)^2 \qquad \text{[प्रश्नानुसार]}$$

$$2401 \quad BC^2 \quad 98(BC) \quad BC^2 \quad 49$$

$$98(BC) \quad 2401 \quad 49$$

$$BC \quad \frac{2352}{98} \quad 24$$

$$AC \quad 49 \quad 24 \quad 25$$

अब, $\sin A \quad \frac{24}{25}, \cos A \quad \frac{7}{25}$

$\tan C \quad \frac{7}{24}, \sec C \quad \frac{25}{24}$

20. यदि $\sec \quad \dfrac{4}{\sqrt{7}}$, तब सिद्ध कीजिए कि

$$\sqrt{\frac{\mathbf{2\tan^2 \quad \text{cosec}^2}}{\mathbf{2\cos^2 \quad \cot^2}}} \quad \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{7}}$$

हल दिया है, $\sec \quad \frac{\text{कर्ण}}{\sqrt{7}} \quad \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}$

पाइथागोरस प्रमेय से,

$$\text{लम्ब} \quad \sqrt{(\text{कर्ण})^2 \quad (\text{आधार})^2}$$

$$\sqrt{16 \quad 7}$$

$$\sqrt{9} \quad 3$$

$$\tan \quad \frac{3}{\sqrt{7}}, \cos \quad \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\text{cosec} \quad \frac{4}{3}, \cot \quad \frac{\sqrt{7}}{3}$$

बायाँ पक्ष $\sqrt{\dfrac{2\tan^2 \quad \text{cosec}^2}{2\cos^2 \quad \cot^2}}$

$$\sqrt{\frac{2\ \frac{9}{7}\ \frac{16}{9}}{2\ \frac{7}{16}\ \frac{7}{9}}}\ \sqrt{\frac{9\ \ 18\ \ 16\ \ 7}{7\ \ 9}}$$

$$\sqrt{\frac{14\ \ 9\ \ 16\ \ 7}{16\ \ 9}}$$

$$\sqrt{\frac{(162\ \ 112)\ \ 16}{(126\ \ 112)\ \ 7}}\ \sqrt{\frac{50\ \ 16}{14\ \ 7}}$$

$$\sqrt{\frac{400}{7\ \ 7}}\ \ \frac{20}{7}$$

दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

प्रश्नावली 8.2

1. $\sin^2 30\ \ \cos^2 45\ \ \cos^2 30$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\sin^2 30\ \ \cos^2 45\ \ \cos^2 30$

$$\frac{1}{2}^2\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}^2\ \ \frac{\sqrt{3}}{2}^2$$

$$\frac{1}{4}\ \ \frac{1}{2}\ \ \frac{3}{4}\ \ \frac{1\ \ 2\ \ 3}{4}\ \ \frac{6}{4}\ \ \frac{3}{2}$$

2. (sin 30 cos 30) (sin 60 cos 60) का मान ज्ञात कीजिए।

हल (sin 30 cos 30) (sin 60 cos 60)

$$\frac{1}{2}\ \ \frac{\sqrt{3}}{2}\ \ \ \frac{\sqrt{3}}{2}\ \ \frac{1}{2}$$

$$\frac{1\ \ \sqrt{3}}{2}\ \ \frac{\sqrt{3}\ \ 1}{2}$$

$$\frac{1\ \ \sqrt{3}\ \ \sqrt{3}\ \ 1}{2}\ \ 0$$

3. $3\sin 30\ \ 4\sin^3 60$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $3\sin 30\ \ 4\sin^3 60$

$$3\ \ \frac{1}{2}\ \ 4\ \frac{\sqrt{3}}{2}^3\ \ \ \frac{3}{2}\ \ \frac{4\ \ 3\sqrt{3}}{8}$$

$$\frac{12\ \ 12\sqrt{3}}{8}\ \ \frac{12(1\ \ \sqrt{3})}{8}\ \ \frac{3(1\ \ \sqrt{3})}{2}$$

4. यदि $x\tan 45\ \ \cos 60\ \ \sin 60\ \cot 60$, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $x\tan 45\ \ \cos 60\ \ \sin 60\ \cot 60$

$$x\ \ 1\ \ \frac{1}{2}\ \ \frac{\sqrt{3}}{2}\ \ \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{x}{2}\ \ \frac{1}{2}\ \ \ \ x\ \ 1$$

5. सिद्ध कीजिए कि

$(\sqrt{3}\ \ 1)(3\ \ \cot 30\ )\ \ \tan^3 60\ \ \ 2\sin 60$

हल बायाँ पक्ष $(\sqrt{3}\ \ 1)(3\ \ \cot 30\ )$

$$(\sqrt{3}\ \ 1)(3\ \ \sqrt{3})$$

$$3\sqrt{3}\ \ 3\ \ 3\ \ \sqrt{3}\ \ 2\sqrt{3}$$

दायाँ पक्ष $\tan^3 60\ \ \ 2\sin 60$

$$(\sqrt{3})^3\ \ 2\ \frac{\sqrt{3}}{2}\ \ \ 3\sqrt{3}\ \ \sqrt{3}$$

$2\sqrt{3}$ बायाँ पक्ष

6. यदि, ABC, C पर समकोण है, तब $\cos(A\ \ B)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $\cos(A\ \ B)\ \ \cos 90$

$[\because A\ \ B\ \ C\ \ 180$ तथा $C\ \ 90\ ]$

0

7. निम्न के मान ज्ञात कीजिए

(i) sin cos यदि 30

(ii) $3\tan^2 45\ \ \ 2\sin 45\ \cos 45$

हल (i) sin cos

sin 30 cos 30 [30 रखने पर]

$$\frac{1}{2}\ \ \frac{\sqrt{3}}{2}\ \ \frac{\sqrt{3}}{4}$$

(ii) $3\tan^2 45\ \ \ 2\sin 45\ \cos 45$

$$3(1)^2\ \ 2\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$3\ \ \frac{2}{2}\ \ 3\ \ 1\ \ 4$$

8. यदि sin cos 0, (0 90), तो का मान ज्ञात कीजिए।

हल sin cos 0

$$\sin\ \ \cos\ \ \ \frac{\sin}{\cos}\ \ 1$$

$$\tan\ \ 1\ \ \ \tan\ \ \ \tan 45$$

$$45$$

9. यदि $2\,\mathrm{cosec}^2 30\ \ x\sin^2 60\ \ \frac{3}{4}\tan^2 30\ \ 10$,

तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया है,

$$2\,\mathrm{cosec}^2 30\ \ \ x\sin^2 60\ \ \ \frac{3}{4}\tan^2 30\ \ \ 10$$

$$2(2)^2\ \ \ x\ \frac{\sqrt{3}}{2}^2\ \ \ \frac{3}{4}\ \frac{1}{\sqrt{3}}^2\ \ \ 10$$

$$8\ \ x\ \frac{3}{4}\ \ \frac{3}{4}\ \ \frac{1}{3}\ \ 10$$

$$8\ \ \frac{3x}{4}\ \ \ \frac{1}{4}\ \ 10$$

$$\frac{3x}{4} \quad 10 \quad 8 \quad \frac{1}{4}$$

$$\frac{3x}{4} \quad \frac{9}{4} \qquad x \quad \frac{9}{3} \quad 3$$

10. सिद्ध कीजिए कि

(i) $2(\cos^2 45 \quad \tan^2 60) \quad 6(\sin^2 45 \quad \tan^2 30) \quad 6$

(ii) $2(\cos^4 60 \quad \sin^4 30) \quad (\tan^2 60 \quad \cot^2 45) \quad 3\sec^2 30 \quad \frac{9}{4}$

हल (i) बायाँ पक्ष $2(\cos^2 45 \quad \tan^2 60) \quad 6(\sin^2 45 \quad \tan^2 30)$

$$2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \quad (\sqrt{3})^2 \quad 6\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \quad \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$2\frac{1}{2} \quad 3 \quad 6\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3}$$

$7 \quad 1 \quad 6$ दायाँ पक्ष

(ii) बायाँ पक्ष $2(\cos^4 60 \quad \sin^4 30) \quad (\tan^2 60 \quad \cot^2 45) \quad 3\sec^2 30$

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^4 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^4 \quad [(\sqrt{3})^2 \quad (1)^2] \quad 3\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$2\frac{1}{16} \quad \frac{1}{16} \quad [3 \quad 1] \quad 3 \quad \frac{4}{3}$$

$\frac{1}{4} \quad 2 \quad 4 \quad \frac{9}{4}$ दायाँ पक्ष **इति सिद्धम्**

11. यदि $\sin(A \quad B) \quad 1$ और $\sin(A \quad B) \quad \frac{1}{2}$; $0 \quad A \quad B \quad 90$ और $A \quad B$, तो A और B का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $\sin(A \quad B) \quad 1$

$$\sin(A \quad B) \quad \sin 90$$

$$A \quad B \quad 90 \qquad \ldots(i)$$

तथा $\sin(A \quad B) \quad \frac{1}{2}$

$$\sin(A \quad B) \quad \sin 30$$

$$A \quad B \quad 30 \qquad \ldots(ii)$$

समी (i) तथा (ii) को जोड़ने पर,

$$2A \quad 120 \qquad A \quad 60$$

समी (i) से, $B \quad 30$

अत: $A \quad 60, B \quad 30$ है।

12. यदि $\sin(A \quad B) \quad 1$ और $\cos(A \quad B) \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$, तो A और B का मान ज्ञात कीजिए।

हल प्रश्न 11 की भाँति स्वयं हल करें।

13. न्यून कोण ABC में, यदि $\tan(A \quad B \quad C) \quad 1$ और $\sec(B \quad C \quad A) \quad 2$, तो A, B और C का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $\tan(A \quad B \quad C) \quad 1$

$$\tan(A \quad B \quad C) \quad \tan 45$$

$$A \quad B \quad C \quad 45 \qquad \ldots(i)$$

तथा $\sec(B \quad C \quad A) \quad 2$

$$\sec(B \quad C \quad A) \quad \sec 60$$

$$B \quad C \quad A \quad 60 \qquad \ldots(ii)$$

किसी त्रिभुज में, $A \quad B \quad C \quad 180 \qquad \ldots(iii)$

समी (i) तथा (ii) से, $2B \quad 105$

$$B \quad \frac{105}{2}$$

समी (ii) तथा (iii) से,

$$2(B \quad C) \quad 240$$

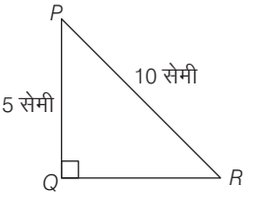
$$B \quad C \quad 120$$

$$C \quad \frac{135}{2} \qquad [B \text{ का मान रखने पर}]$$

समी (iii) से, $A \quad 60$

अत: $A \quad 60, B \quad \frac{105}{2}$ और $C \quad \frac{135}{2}$ है।

14. नीचे दी गई आकृति में, PQR, Q पर समकोण है, यदि PQ 5 सेमी, PR 10 सेमी है, तो QPR और PRQ ज्ञात कीजिए।



हल समकोण PQR में, $Q \quad 90, PQ \quad 5, PR \quad 10$ सेमी

$$\cos(\quad QPR) \quad \frac{\text{आधार } (PQ)}{\text{कर्ण } (PR)} \quad \frac{5}{10} \quad \frac{1}{2}$$

$$\cos(\quad QPR) \quad \cos 60$$

$$QPR \quad 60$$

तथा $\sin(\quad PRQ) \quad \frac{\text{लम्ब } (PQ)}{\text{कर्ण } (PR)} \quad \frac{5}{10} \quad \frac{1}{2}$

$$\sin(\quad PRQ) \quad \sin 30$$

$$PRQ \quad 30$$

प्रश्नावली 8.3

1. $(\text{cosec}^2 \quad 1)\tan^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $(\text{cosec}^2 \quad 1) \quad \tan^2$

$$\cot^2 \quad \tan^2$$

$$\frac{1}{\tan^2} \quad \tan^2 \quad 1$$

2. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{\frac{1 \quad \cos A}{1 \quad \cos A}} \quad \text{cosec } A \quad \cot A$

हल बायाँ पक्ष $\sqrt{\frac{1 \quad \cos A}{1 \quad \cos A}}$

$$\sqrt{\frac{1 \quad \cos A}{1 \quad \cos A} \quad \frac{1 \quad \cos A}{1 \quad \cos A}}$$

$$\sqrt{\frac{(1 \quad \cos A)^2}{1 \quad \cos^2 A}} \quad \sqrt{\frac{(1 \quad \cos A)^2}{\sin^2 A}}$$

$$\frac{1 \quad \cos A}{\sin A} \quad \text{cosec } A \quad \cot A$$

दायाँ पक्ष **इति सिद्धम्**

3. दिखाइए कि $(1 \quad \sin A \quad \cos A)^2 \quad 2(1 \quad \sin A)(1 \quad \cos A)$

हल बायाँ पक्ष $(1 \quad \sin A \quad \cos A)^2$

$$1 \quad \sin^2 A \quad \cos^2 A \quad 2 \sin A$$

$$2 \sin A \cos A \quad 2 \cos A$$

$$1 \quad 1 \quad 2 \sin A \quad 2 \sin A \cos A \quad 2 \cos A \qquad [\because \sin^2 A \quad \cos^2 A \quad 1]$$

$$2 \quad 2 \sin A \quad 2 \sin A \cos A \quad 2 \cos A$$

$$2(1 \quad \sin A) \quad 2 \cos A(1 \quad \sin A)$$

$$2(1 \quad \sin A)(1 \quad \cos A)$$

दायाँ पक्ष **इति सिद्धम्**

4. सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\sin}{1 \quad \cos} \quad \frac{1 \quad \cos}{\sin} \quad 2 \text{ cosec}$$

हल बायाँ पक्ष $\frac{\sin}{1 \quad \cos} \quad \frac{1 \quad \cos}{\sin}$

$$\frac{\sin^2 \quad 1 \quad \cos^2 \quad 2 \cos}{(1 \quad \cos)\sin}$$

$$\frac{2 \quad 2 \cos}{(1 \quad \cos)\sin}$$

$$\frac{2(1 \quad \cos)}{(1 \quad \cos)\sin}$$

2 cosec दायाँ पक्ष

5. सिद्ध कीजिए कि $\frac{\cos}{1 \quad \sin} \quad \frac{1 \quad \sin}{\cos}$

हल बायाँ पक्ष $\frac{\cos}{1 \quad \sin}$

$$\frac{\cos}{1 \quad \sin} \quad \frac{1 \quad \sin}{1 \quad \sin}$$

$$\frac{\cos \quad (1 \quad \sin)}{1 \quad \sin^2}$$

$$\frac{\cos \quad (1 \quad \sin)}{\cos^2}$$

$$\frac{1 \quad \sin}{\cos}$$ दायाँ पक्ष **इति सिद्धम्**

6. a और b का मान ज्ञात कीजिए।

$\sin x \quad \cos x(5 \tan x \quad 2 \cot x) \quad a \quad b \sin^2 x$

हल $\sin x \quad \cos x(5 \tan x \quad 2 \cot x) \quad a \quad b \sin^2 x$

$$\sin x \quad \cos x \quad 5\frac{\sin x}{\cos x} \quad 2\frac{\cos x}{\sin x} \quad a \quad b \sin^2 x$$

$$\sin x \quad \cos x \quad \frac{5 \sin^2 x \quad 2 \cos^2 x}{\cos x \quad \sin x} \quad a \quad b \sin^2 x$$

$$5 \sin^2 x \quad 2 \cos^2 x \quad a \quad b \sin^2 x$$

$$5 \sin^2 x \quad 2(1 \quad \sin^2 x) \quad a \quad b \sin^2 x$$

$$5 \sin^2 x \quad 2 \quad 2 \sin^2 x \quad a \quad b \sin^2 x$$

$$2 \quad 3 \sin^2 x \quad a \quad b \sin^2 x$$

दोनों पक्षों की तुलना करने पर,

$$a \quad 2, b \quad 3$$

7. सिद्ध कीजिए कि

$$(1 \quad \tan^2 \quad) \quad 1 \quad \frac{1}{\tan^2} \quad \frac{1}{\sin^2 \quad \sin^4}$$

हल बायाँ पक्ष $(1 \quad \tan^2 \quad) \quad 1 \quad \frac{1}{\tan^2}$

$$\sec^2 \quad (1 \quad \cot^2 \quad)$$

$$\frac{1}{\cos^2} \quad \text{cosec}^2$$

$$\frac{1}{\cos^2} \quad \frac{1}{\sin^2} \quad \frac{\sin^2 \quad \cos^2}{\cos^2 \quad \sin^2}$$

$$\frac{1}{(1 \quad \sin^2 \quad)(\sin^2 \quad)}$$

$$\frac{1}{\sin^2 \quad \sin^4}$$ दायाँ पक्ष **इति सिद्धम्**

8. सिद्ध कीजिए कि

(i) $(1 \quad \cot \quad \text{cosec} \quad)(1 \quad \tan \quad \sec \quad) \quad 2$

(ii) $\tan^2 \quad \cot^2 \quad 2 \quad \sec^2 \quad \text{cosec}^2$

हल (i) बायाँ पक्ष

$$(1 \quad \cot \quad \text{cosec} \quad)(1 \quad \tan \quad \sec \quad)$$

$$1 \quad \frac{\cos}{\sin} \quad \frac{1}{\sin} \quad 1 \quad \frac{\sin}{\cos} \quad \frac{1}{\cos}$$

$$\frac{\sin \quad \cos \quad 1}{\sin} \quad \frac{\cos \quad \sin \quad 1}{\cos}$$

$$\frac{(\sin \quad \cos \quad)^2 \quad 1}{\sin \quad \cos}$$

$$[\because (a \quad b)(a \quad b) \quad a^2 \quad b^2]$$

$$\frac{\sin^2 \quad \cos^2 \quad 2\sin \quad \cos \quad 1}{\sin \quad \cos}$$

$$\frac{1 \quad 2\sin \quad \cos \quad 1}{\sin \quad \cos} \quad \frac{2\sin \quad \cos}{\sin \quad \cos}$$

2

दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

(ii) बायाँ पक्ष $\tan^2 \quad \cot^2 \quad 2$

$\sec^2 \quad 1 \quad \text{cosec}^2 \quad 1 \quad 2$

$\sec^2 \quad \text{cosec}^2$

दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

9. सिद्ध कीजिए कि $\tan \quad \cot \quad \frac{2\sin^2 \quad 1}{\sin \quad \cos}$

हल बायाँ पक्ष $\tan \quad \cot$

$$\frac{\sin}{\cos} \quad \frac{\cos}{\sin}$$

$$\frac{\sin^2 \quad \cos^2}{\sin \quad \cos}$$

$$\frac{\sin^2 \quad (1 \quad \sin^2)}{\sin \quad \cos}$$

$$\frac{2\sin^2 \quad 1}{\sin \quad \cos}$$

दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

10. सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\sec^2 \quad \sin^2}{\tan^2} \quad 1 \quad \cot^2 \quad \cos^2$$

हल बायाँ पक्ष $\frac{\sec^2 \quad \sin^2}{\tan^2}$

$$\frac{\frac{1}{\cos^2} \quad \sin^2}{\frac{\sin^2}{\cos^2}}$$

$$\frac{1 \quad \sin^2 \quad \cos^2}{\sin^2}$$

$$\frac{\sin^2 \quad \cos^2 \quad \sin^2 \quad \cos^2}{\sin^2}$$

$1 \quad \cot^2 \quad \cos^2$

दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

11. सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{1 \quad \cos A \quad \sin A}{\sin A \quad \cos A \quad 1} \quad \frac{1 \quad \sin A}{\cos A}$$

हल बायाँ पक्ष $\frac{1 \quad \cos A \quad \sin A}{\sin A \quad \cos A \quad 1}$

$$\frac{\sin A \quad \cos A \quad 1}{\sin A \quad \cos A \quad 1}$$

$$\frac{(1 \quad \sin A)^2 \quad \cos^2 A}{(\sin A \quad \cos A)^2 \quad 1}$$

$$\frac{1 \quad \sin^2 A \quad 2\sin A \quad \cos^2 A}{\sin^2 A \quad \cos^2 A \quad 2\sin A\cos A \quad 1}$$

$$\frac{(1 \quad \cos^2 A) \quad \sin^2 A \quad 2\sin A}{1 \quad 2\sin A\cos A \quad 1}$$

$$\frac{\sin^2 A \quad \sin^2 A \quad 2\sin A}{2\sin A\cos A}$$

$$\frac{2\sin^2 A \quad 2\sin A}{2\sin A\cos A}$$

$$\frac{2\sin A(1 \quad \sin A)}{2\sin A\cos A}$$

$\frac{1 \quad \sin A}{\cos A}$ दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

12. सिद्ध कीजिए कि $(\text{cosec} \quad \sin \ )(\sec \quad \cos \ ) \quad \sin \quad \cos \quad \frac{1}{\tan \quad \cot}$

हल बायाँ पक्ष $(\text{cosec} \quad \sin \ )(\sec \quad \cos \ )$

$$\frac{1}{\sin} \quad \sin \quad \frac{1}{\cos} \quad \cos$$

$$\frac{1 \quad \sin^2}{\sin} \quad \frac{1 \quad \cos^2}{\cos}$$

$$\frac{\cos^2}{\sin} \quad \frac{\sin^2}{\cos}$$

$$\cos \quad \sin$$

दायाँ पक्ष $\frac{1}{\tan \quad \cot}$

$$\frac{1}{\frac{\sin}{\cos} \quad \frac{\cos}{\sin}}$$

$$\frac{1}{\frac{\sin^2 \quad \cos^2}{\cos \quad \sin}}$$

$$\cos \quad \sin$$

बायाँ पक्ष दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

13. सिद्ध कीजिए कि

$$\sqrt{\frac{\sin A \quad 1}{1 \quad \sin A}} \quad \sqrt{\frac{1 \quad \sin A}{\sin A \quad 1}} \quad 2\sec A$$

हल बायाँ पक्ष $\sqrt{\frac{\sin A \quad 1}{1 \quad \sin A}} \quad \sqrt{\frac{1 \quad \sin A}{\sin A \quad 1}}$

$$\frac{\sin A \quad 1 \quad 1 \quad \sin A}{\sqrt{1 \quad \sin^2 A}}$$

$$\frac{2}{\cos A}$$

$2 \sec A$ दायाँ पक्ष **इति सिद्धम्**

14. सिद्ध कीजिए कि

$$\sqrt{\frac{\sec A - \tan A}{\sec A + \tan A}}\sqrt{\frac{\text{cosec } A - \cot A}{\text{cosec } A + \cot A}} = (\sec A - \tan A)(\text{cosec } A - \cot A)$$

हल बायाँ पक्ष $\sqrt{\frac{\sec A - \tan A}{\sec A + \tan A}}\sqrt{\frac{\text{cosec } A - \cot A}{\text{cosec } A + \cot A}}$

$$\sqrt{\frac{\sec A - \tan A}{\sec A + \tan A}\cdot\frac{\sec A - \tan A}{\sec A - \tan A}}$$

$$\sqrt{\frac{\text{cosec } A - \cot A}{\text{cosec } A + \cot A}\cdot\frac{\text{cosec } A - \cot A}{\text{cosec } A - \cot A}}$$

$$\sqrt{\frac{(\sec A - \tan A)^2}{\sec^2 A - \tan^2 A}} \quad \sqrt{\frac{(\text{cosec } A - \cot A)^2}{\text{cosec}^2 A - \cot^2 A}}$$

$(\sec A - \tan A)(\text{cosec } A - \cot A)$

दायाँ पक्ष $[\because \sec^2 A - \tan^2 A = 1$ तथा $\text{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1]$

15. सिद्ध कीजिए कि

$$\sec^2 \frac{\sin^2}{2\cos^4} \frac{2\sin^4}{\cos^2} = 1$$

हल बायाँ पक्ष $\sec^2 \frac{\sin^2}{2\cos^4} \frac{2\sin^4}{\cos^2}$

$$\sec^2 \frac{\sin^2 (1 - 2\sin^2)}{\cos^2 (2\cos^2 - 1)}$$

$$\sec^2 \frac{\sin^2 [1 - 2(1 - \cos^2)]}{\cos^2 (2\cos^2 - 1)}$$

$$\sec^2 \frac{\sin^2 (2\cos^2 - 1)}{\cos^2 (2\cos^2 - 1)}$$

$\sec^2 \tan^2$

1 दायाँ पक्ष **इति सिद्धम्**

16. सिद्ध कीजिए कि

$$(\tan \sec 1)(\tan 1 \sec) \frac{2\sin}{1 \sin}$$

हल बायाँ पक्ष

$(\tan \sec 1)(\tan 1 \sec)$

$$\frac{\sin}{\cos}\frac{1}{\cos} 1 \frac{\sin}{\cos} 1 \frac{1}{\cos}$$

$$\frac{\sin 1 \cos}{\cos} \frac{\sin \cos 1}{\cos}$$

$$\frac{(\sin 1)^2 \cos^2}{\cos^2}$$

$$\frac{\sin^2 1 2\sin \cos^2}{\cos^2}$$

$$\frac{\sin^2 1 \cos^2 2\sin}{1 \sin^2}$$

$$\frac{\sin^2 \sin^2 2\sin}{(1 \sin)(1 \sin)}$$

$$\frac{2\sin^2 2\sin}{(1 \sin)(1 \sin)}$$

$$\frac{2\sin (1 \sin)}{(1 \sin)(1 \sin)}$$

$\frac{2\sin}{1 \sin}$ दायाँ पक्ष **इति सिद्धम्**

17. सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\cos A}{1 \tan A} \frac{\sin^2 A}{\sin A \cos A} = \sin A \cos A$$

हल बायाँ पक्ष

$$\frac{\cos A}{1 \tan A} \frac{\sin^2 A}{\sin A \cos A}$$

$$\frac{\cos A}{1 \frac{\sin A}{\cos A}} \frac{\sin^2 A}{\sin A \cos A}$$

$$\frac{\cos^2 A}{\cos A \sin A} \frac{\sin^2 A}{\cos A \sin A}$$

$$\frac{\cos^2 A \sin^2 A}{\cos A \sin A}$$

$$\frac{(\cos A \sin A)(\cos A \sin A)}{(\cos A \sin A)}$$

$\sin A \cos A$ दायाँ पक्ष

18. सिद्ध कीजिए कि

$2\sin A \cos A (\cos A \sin A)^2 (2\cos A \sin A)^2 = p\sin^2 A q$

तब p और q का मान ज्ञात कीजिए।

हल बायाँ पक्ष

$2\sin A \cos A (\cos A \sin A)^2 (2\cos A \sin A)^2$

$2\sin A \cos A \cos^2 A \sin^2 A$

$2\cos A \sin A 4\cos^2 A$

$\sin^2 A 4\sin A \cos A$

$1 4\cos^2 A \sin^2 A$

$1 4(1 \sin^2 A) \sin^2 A$

$3\sin^2 A 3$

अब, बायाँ पक्ष दायाँ पक्ष

$3\sin^2 A 3 p\sin^2 A q$

दोनों पक्षों की तुलना करने पर,

$p \quad 3, q \quad 3$

19. सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{\text{cosec} \quad \cot}{\text{cosec} \quad \cot}$

$(\text{cosec} \quad \cot)^2 \quad 1 \quad 2\cot^2 \quad 2\,\text{cosec} \quad \cot$

हल बायाँ पक्ष $\dfrac{\text{cosec} \quad \cot}{\text{cosec} \quad \cot}$

$$\frac{\text{cosec} \quad \cot}{\text{cosec} \quad \cot} \quad \frac{\text{cosec} \quad \cot}{\text{cosec} \quad \cot}$$

$$\frac{(\text{cosec} \quad \cot)^2}{\text{cosec}^2 \quad \cot^2}$$

$$(\text{cosec} \quad + \cot)^2$$

दायाँ पक्ष (I)

$$\text{cosec}^2 \quad \cot^2 \quad 2\,\text{cosec} \quad \cot$$

$$1 \quad \cot^2 \quad \cot^2 \quad 2\,\text{cosec} \quad \cot$$

$$1 \quad 2\cot^2 \quad 2\,\text{cosec} \quad \cot$$

दायाँ पक्ष (II) **इति सिद्धम्**

20. सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\sin A \quad \sin B}{\cos A \quad \cos B} \quad \frac{\cos A \quad \cos B}{\sin A \quad \sin B} \quad 0$$

हल बायाँ पक्ष

$$\frac{\sin A \quad \sin B}{\cos A \quad \cos B} \quad \frac{\cos A \quad \cos B}{\sin A \quad \sin B}$$

$$\frac{\sin^2 A \quad \sin^2 B \quad \cos^2 A \quad \cos^2 B}{(\cos A \quad \cos B)(\sin A \quad \sin B)}$$

$$\frac{(\sin^2 A \quad \cos^2 A) \quad (\sin^2 B \quad \cos^2 B)}{(\cos A \quad \cos B)(\sin A \quad \sin B)}$$

$$\frac{1 \quad 1}{(\cos A \quad \cos B)(\sin A \quad \sin B)}$$

0 दायाँ पक्ष **इति सिद्धम्**

21. सिद्ध कीजिए कि $q(p^2 \quad 1) \quad 2p$**, जहाँ** $\sin \quad \cos \quad p$ **और** $\sec \quad \text{cosec} \quad q$

हल बायाँ पक्ष $q(p^2 \quad 1)$

$$(\sec \quad \text{cosec}\,)\,[(\sin \quad \cos\,)^2 \quad 1]$$

$$(\sec \quad \text{cosec}\,)\,(\sin^2 \quad \cos^2 \quad 2\sin \quad \cos \quad 1)$$

$$(\sec \quad \text{cosec}\,)\,(1 \quad 2\sin \quad \cos \quad 1)$$

$$\frac{1}{\cos} \quad \frac{1}{\sin} \quad 2\sin \quad \cos$$

$$\frac{\sin \quad \cos}{\cos \quad \sin} \quad 2\sin \quad \cos$$

$$2(\sin \quad \cos\,)$$

$2p$ दायाँ पक्ष **इति सिद्धम्**

22. यदि $\sec \quad \tan \quad p$**, दिखाइए कि** $\sec \quad \tan \quad \dfrac{1}{p}$ **तथा** $\cos$ **और** $\sin$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल दिया है, $\sec \quad \tan \quad p$ ...(i)

$$\frac{1}{\sec \quad \tan} \quad \frac{1}{p}$$

$$\frac{\sec \quad \tan}{\sec^2 \quad \tan^2} \quad \frac{1}{p}$$

$$\sec \quad \tan \quad \frac{1}{p} \qquad \text{...(ii)}$$

समी (i) तथा (ii) को जोड़ने पर

$$2\sec \quad p \quad \frac{1}{p}$$

$$2\,\frac{1}{\cos} \quad \frac{p^2 \quad 1}{p}$$

$$\cos \quad \frac{2p}{p^2 \quad 1}$$

तथा $\sin \quad \sqrt{1 \quad \cos^2}$

$$\sqrt{1 \quad \left(\frac{2p}{p^2 \quad 1}\right)^2}$$

$$\sqrt{\frac{p^4 \quad 1 \quad 2p^2 \quad 4p^2}{(p^2 \quad 1)^2}}$$

$$\sqrt{\frac{p^4 \quad 1 \quad 2p^2}{(p^2 \quad 1)^2}}$$

$$\sqrt{\frac{(p^2 \quad 1)^2}{(p^2 \quad 1)^2}} \quad \frac{p^2 \quad 1}{p^2 \quad 1}$$

23. सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{\sin A}{1 \quad \cos A} \quad \dfrac{\sin A}{1 \quad \cos A}$

$$\sqrt{\frac{1 \quad \cos A}{1 \quad \cos A}} \quad \sqrt{\frac{1 \quad \cos A}{1 \quad \cos A}} \quad 2\,\text{cosec}\,A$$

हल बायाँ पक्ष (I) $\dfrac{\sin A}{1 \quad \cos A} \quad \dfrac{\sin A}{1 \quad \cos A}$

$$\frac{\sin A\,[1 \quad \cos A \quad 1 \quad \cos A]}{(1 \quad \cos A)(1 \quad \cos A)}$$

$$\frac{2\sin A}{1 \quad \cos^2 A} \quad \frac{2\sin A}{\sin^2 A}$$

$2\,\text{cosec}\,A$ दायाँ पक्ष

बायाँ पक्ष (II) $\sqrt{\dfrac{1 \quad \cos A}{1 \quad \cos A}} \quad \sqrt{\dfrac{1 \quad \cos A}{1 \quad \cos A}}$

$$\frac{1 \quad \cos A \quad 1 \quad \cos A}{\sqrt{1 \quad \cos^2 A}} \quad \frac{2}{\sin A}$$

$2\,\text{cosec}\,A$ दायाँ पक्ष **इति सिद्धम्**

24. सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\sin A}{1 \quad \cos A} \quad \frac{1 \quad \cos A}{\sin A} \quad \frac{\sin A}{1 \quad \cos A} \quad \frac{1 \quad \cos A}{\sin A}$$

$$4 \operatorname{cosec} A \cot A$$

हल बायाँ पक्ष

$$\frac{\sin A}{1 \quad \cos A} \quad \frac{1 \quad \cos A}{\sin A} \quad \frac{\sin A}{1 \quad \cos A} \quad \frac{1 \quad \cos A}{\sin A}$$

$$\frac{\sin^2 A \quad 1 \quad \cos^2 A \quad 2\cos A}{\sin A(1 \quad \cos A)}$$

$$\frac{\sin^2 A \quad 1 \quad \cos^2 A \quad 2\cos A}{\sin A(1 \quad \cos A)}$$

$$\frac{2 \quad 2\cos A}{\sin A(1 \quad \cos A)} \quad \frac{(1 \quad \sin^2 A) \quad \cos^2 A \quad 2\cos A}{\sin A(1 \quad \cos A)}$$

$$\frac{2(1 \quad \cos A)}{\sin A(1 \quad \cos A)} \quad \frac{2\cos^2 A \quad 2\cos A}{\sin A(1 \quad \cos A)}$$

$$\frac{2}{\sin A} \quad \frac{2\cos A(1 \quad \cos A)}{\sin A(1 \quad \cos A)}$$

$$\frac{4}{\sin A} \quad \frac{\cos A}{\sin A}$$

$4 \operatorname{cosec} A \cot A$ दायाँ पक्ष **इति सिद्धम्**

25. यदि cos sin $\sqrt{2}$ sin , सिद्ध कीजिए कि cos sin $\sqrt{2}$ cos

हल दिया है, cos sin $\sqrt{2}$ sin

cos $\sqrt{2}$ sin sin

cos sin $(\sqrt{2} \quad 1)$

sin $\frac{\cos}{\sqrt{2} \quad 1} \quad \frac{\sqrt{2} \quad 1}{\sqrt{2} \quad 1}$

sin cos $(\sqrt{2} \quad 1)$

sin $\sqrt{2}$ cos cos

cos sin $\sqrt{2}$ cos **इति सिद्धम्**

26. दिखाइए कि

$2(\sin^6 \quad \cos^6) \quad 3(\sin^4 \quad \cos^4) \quad 1 \quad 0$

हल बायाँ पक्ष

$2(\sin^6 \quad \cos^6) \quad 3(\sin^4 \quad \cos^4) \quad 1$

$2[(\sin^2)^3 \quad (\cos^2)^3] \quad 3(\sin^4 \quad \cos^4) \quad 1$

$2(\sin^2 \quad \cos^2)(\sin^4 \quad \cos^4$

$\sin^2 \quad \cos^2) \quad 3(\sin^4 \quad \cos^4) \quad 1$

$2(\sin^4 \quad \cos^4) \quad 2\sin^2 \quad \cos^2$

$3(\sin^4 \quad \cos^4) \quad 1$

$(\sin^4 \quad \cos^4) \quad 2\sin^2 \quad \cos^2 \quad 1$

$[\sin^4 \quad \cos^4 \quad 2\sin^2 \quad \cos^2] \quad 1$

$(\sin^2 \quad \cos^2)^2 \quad 1$

1 1 0 दायाँ पक्ष **इति सिद्धम्**

27. यदि m cos sin और n cos sin दिखाइए कि $\sqrt{\frac{m}{n}} \quad \sqrt{\frac{n}{m}} \quad \frac{2}{\sqrt{1 \quad \tan^2}}$

हल बायाँ पक्ष $\sqrt{\frac{m}{n}} \quad \sqrt{\frac{n}{m}} \quad \frac{m \quad n}{\sqrt{m \; n}}$

$$\frac{\cos \quad \sin \quad \cos \quad \sin}{\sqrt{(\cos \quad \sin)(\cos \quad \sin)}}$$

$$\frac{2\cos}{\sqrt{\cos^2 \quad \sin^2}}$$

$$\frac{2\cos}{\cos \sqrt{1 \quad \tan^2}} \quad \frac{2}{\sqrt{1 \quad \tan^2}}$$

दायाँ पक्ष **इति सिद्धम्**

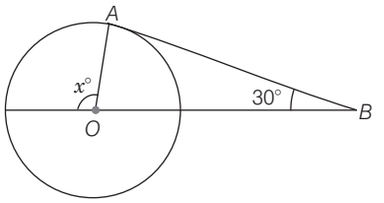
❐❐❐

10

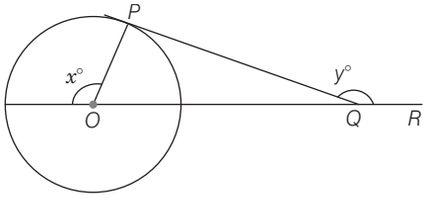
वृत्त

प्रश्नावली 10.1

1. (i) निम्न चित्र में, x° का मान ज्ञात कीजिए।



(ii) निम्न चित्र में, $x^\circ + y^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल (i) चित्र में, $\angle OAB = 90^\circ$

$\therefore \quad \angle BOA = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ)$

$= 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

अब, $\quad x^\circ = 180^\circ - \angle BOA$

$\Rightarrow \quad x^\circ = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

(ii) चित्र में, $\angle OPQ = 90^\circ$, तब

$\angle POQ + \angle PQO = 90^\circ$ ...(i)

$x^\circ = 180^\circ - \angle POQ$ ...(ii)

तथा $\quad y^\circ = 180^\circ - \angle PQO$ ...(iii)

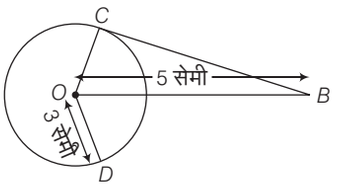
समी (ii) तथा (iii) को जोड़ने पर,

$x^\circ + y^\circ = 360^\circ - (\angle POQ + \angle PQO)$

$\Rightarrow \quad x^\circ + y^\circ = 360^\circ - 90^\circ$ [समी (i) से]

$\Rightarrow \quad x^\circ + y^\circ = 270^\circ$

2. निम्न चित्र में, O वृत्त का केन्द्र है तथा OD वृत्त की त्रिज्या है। यदि $OB = 5$ सेमी, तो स्पर्श रेखा BC का मान ज्ञात कीजिए।



हल $\because \quad OC = OD = 3$ सेमी [$\because$ वृत्त की त्रिज्याएँ बराबर होंगी]

ΔOBC में, $\quad \angle OCB = 90^\circ$

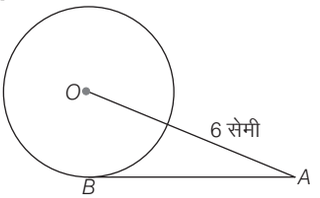
$\therefore \quad OB^2 = OC^2 + BC^2$

$\Rightarrow \quad (5)^2 = (3)^2 + BC^2$

$\Rightarrow \quad BC^2 = 25 - 9 = 16$

$\Rightarrow \quad BC = 4$ सेमी

3. निम्न चित्र में, $\angle OAB = 60^\circ$ है, तो वृत्त की त्रिज्या किसके बराबर होगी?



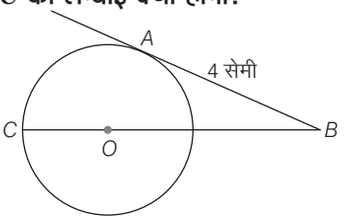
हल $\sin 60^\circ = \dfrac{OB}{OA}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{OB}{6}$

$\Rightarrow \quad OB = 3\sqrt{3}$ सेमी

अत: वृत्त की त्रिज्या $3\sqrt{3}$ सेमी है।

4. निम्न चित्र में, स्पर्श रेखा $AB = 4$ सेमी और वृत्त की त्रिज्या 3 सेमी है। BC की लम्बाई क्या होगी?



हल ΔOAB में, $\quad \angle OAB = 90^\circ$

$OA = 3, AB = 4$

$\therefore \quad OB^2 = (OA)^2 + (AB)^2$

$\Rightarrow \quad OB^2 = 9 + 16$

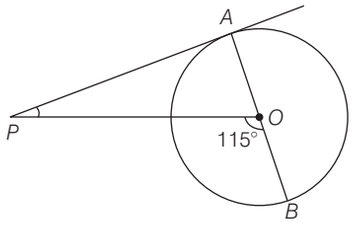
$\Rightarrow \quad OB^2 = 25 \Rightarrow OB = 5$

अब, $\quad BC = OB + OC = 5 + 3$

[$\because$ $OC = 3$ सेमी, वृत्त की त्रिज्या]

$= 8$ सेमी

5. निम्न चित्र में, रेखा PA, बाह्य बिन्दु P से वृत्त जिसका केन्द्र O है, पर खींची गई स्पर्शी है। यदि $\angle POB = 115^\circ$, तब $\angle APO$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल चित्र में, PA स्पर्श रेखा तथा OA त्रिज्या है।

$\therefore \quad \angle OAP = 90°$

$\Rightarrow \quad \angle AOP = 180° - 115°$

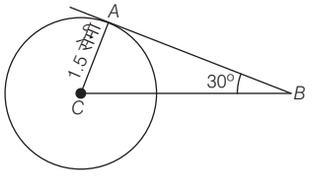
$\Rightarrow \quad \angle AOP = 65°$

अब, $\angle APO = 180° - (\angle OAP + \angle AOP)$

$= 180° - (90° + 65°) = 25°$

6. वृत्त जिसका केन्द्र C त्रिज्या 1.5 सेमी तथा $\angle CBA = 30°$, बिन्दु A से खीची गई स्पर्श रेखा AB है, तब स्पर्श रेखा AB तथा रेखाखण्ड CB की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल ΔCAB में, $\angle CAB = 90°$



$\therefore \quad \sin 30° = \dfrac{AC}{BC} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{1.5}{BC}$

$\Rightarrow \quad BC = 3$ सेमी

तथा $\quad \tan 30° = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1.5}{AB}$

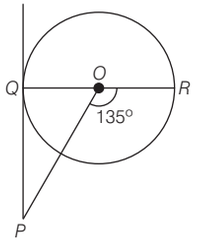
$\Rightarrow \quad AB = 1.5\sqrt{3}$

$\Rightarrow \quad AB = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ सेमी

अत: $AB = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ सेमी, $CB = 3$ सेमी

7. वृत्त, जिसका केन्द्र O, QOR वृत्त का व्यास है तथा $\angle POR = 135°$, बिन्दु P से खींची गई स्पर्श रेखा PQ है, तब $\angle OPQ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $\angle POR = 135°$



$\therefore \quad \angle POQ = 180° - 135° = 45°$

$\angle OQP = 90°$

ΔOPQ में,

$\therefore \quad \angle OPQ = 180° - (90° + 45°)$

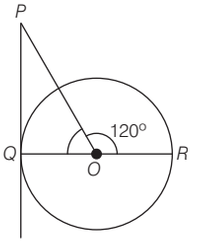
[$\because$ त्रिभुज के तीनों कोणों का योग = 180°]

$= 180° - 135°$

$= 45°$

8. वृत्त जिसका केन्द्र O, QOR वृत्त का व्यास है जिसकी लम्बाई 8 सेमी जबकि $\angle POR = 120°$ किसी बाह्य बिन्दु P से खींची गई स्पर्श रेखा PQ है, तब OP तथा PQ की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $\angle POR = 120°$



$\therefore \quad \angle POQ = 60°$

तथा ΔPQO में, $\quad \angle Q = 90°$

$\therefore \quad \cos 60° = \dfrac{OQ}{OP}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{OP}$

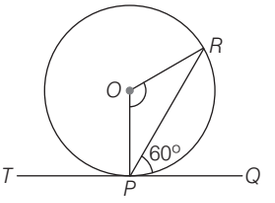
$\Rightarrow \quad OP = 8$ सेमी

तथा $\quad \sin 60° = \dfrac{PQ}{OP}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{PQ}{8}$

$\Rightarrow \quad PQ = 4\sqrt{3}$ सेमी

9. निम्न चित्र में, O वृत्त का केन्द्र है और TPQ इसकी स्पर्श रेखा है। यदि $\angle RPQ = 60°$, तो $\angle POR$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल दिया है, $\angle RPQ = 60°$

$\because$ OP त्रिज्या तथा TQ स्पर्श रेखा है।

$\therefore \quad \angle OPQ = 90°$

तब, $\quad \angle OPR = 90° - 60° = 30°$

ΔOPR में,

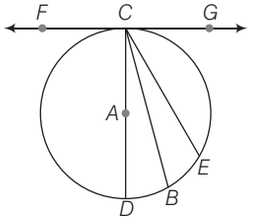
$OP = OR$

$\therefore \quad \angle ORP = \angle OPR = 30°$

तब, $\quad \angle POR = 180° - (30° + 30°)$

$= 180° - 60° = 120°$

10. निम्न चित्र में, केन्द्र A वाले वृत्त की स्पर्श रेखा FG है यदि $\angle DCB = 15°$ तथा $CE = DE$ तब, $\angle GCE$ तथा $\angle BCE$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल दिया है, $\angle DCB = 15°$

$\angle DEC = 90°$ [अर्द्धवृत्त में बना कोण]

तथा $CE = DE$

$\therefore$ $\angle DCE = \angle CDE = 45°$

अब, $\angle GCE = 45°$

तथा $\angle BCE = 45° - \angle DCB$

$= 45° - 15° = 30°$

प्रश्नावली 10.2

1. यदि वृत्त की त्रिज्या 5 सेमी है, तब समान्तर स्पर्श रेखाओं के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, वृत्त की त्रिज्या = 5 सेमी

अब, समान्तर स्पर्श रेखाओं के बीच की दूरी

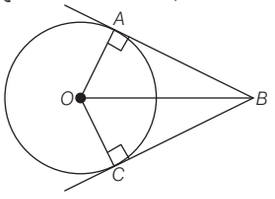
= वृत्त का व्यास

$= 2 \times$ त्रिज्या

$= 2 \times 5 = 10$ सेमी

2. यदि AB और BC, केन्द्र O वाले वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं, जबकि $\angle AOC = 120°$, तब $\angle ABC$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल AB तथा BC वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं।



$\therefore$ $\angle OAB = \angle OCB = 90°$

तथा $\angle AOC = 120°$ [दिया है]

$\therefore$ $\angle ABC = 180° - 120° = 60°$

3. 7 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त के केन्द्र से 25 सेमी दूर स्थित किसी बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल स्पर्श रेखा की लम्बाई

$= \sqrt{(\text{केन्द्र से बाह्य बिन्दु की दूरी})^2 - (\text{वृत्त की त्रिज्या})^2}$

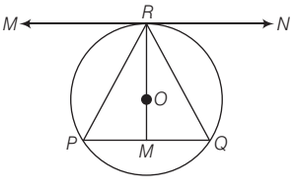
$= \sqrt{(25)^2 - (7)^2} = \sqrt{625 - 49} = \sqrt{576} = 24$ सेमी

$\because$ एक ही बिन्दु से वृत्त पर खींची स्पर्श रेखाएँ बराबर होती हैं।

अत: दोनों स्पर्श रेखाओं की लम्बाई 24 सेमी है।

4. वृत्त की जीवा PQ, वृत्त के बिन्दु R से खींची गई स्पर्शी के समान्तर है। दिखाइए कि R, चाप PRQ को समद्विभाजित करता है।

हल वृत्त के बिन्दु R से स्पर्शी MN खींची। स्पर्श रेखा MN के समान्तर जीवा PQ खींची।



अब, $OR \perp MN$ खींची।

OR को आगे बढ़ाने पर यह PQ को बिन्दु M पर काटती है, जोकि PQ के लम्बवत् है।

ΔPMR और ΔQMR में,

$\angle PMR = \angle QMR = 90°$

$\Rightarrow$ $RM = RM$

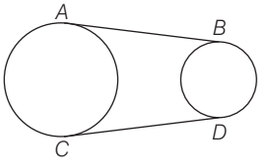
$\Rightarrow$ $PM = MQ$

$\therefore$ $\Delta PMR \sim \Delta QMR$ [SAS समरूपता से]

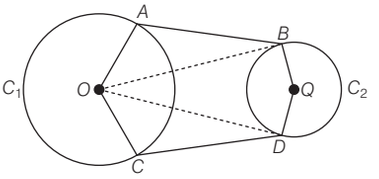
तब, $PR = QR$

अत: R, चाप PQR को समद्विभाजित करता है।

5. चित्र में, AB और CD दो असमान त्रिज्याओं वाले वृत्तों की उभयनिष्ठ स्पर्शियाँ हैं। सिद्ध कीजिए कि $AB = CD$।



हल सर्वप्रथम, वृत्त C_2 के बाह्य बिन्दु O से स्पर्शियाँ OB और OD खींची।



यहाँ, $OB = OD$

अब, OA, OC, QB और QD को मिलाइए।

समकोण ΔOAB और ΔOCD में,

$OA = OC$ [त्रिज्याएँ]

$\angle A = \angle C$ [प्रत्येक $90°$]

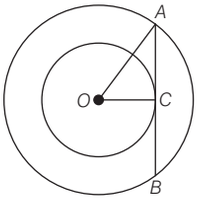
$OB = OD$ [स्पर्शी]

$\therefore$ $\Delta OAB \cong \Delta OCD$ [SAS सर्वांगसमता से]

$\therefore$ $AB = CD$ **इति सिद्धम्**

6. यदि दो संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ 4 सेमी और 5 सेमी हैं, तो एक वृत्त की जीवा की लम्बाई जोकि दूसरे वृत्त पर स्पर्शी है, ज्ञात कीजिए।

हल माना O दोनों वृत्तों का केन्द्र है।



तथा AB बड़े वृत्त की जीवा तथा छोटे वृत्त की स्पर्शी है।

$\therefore$ $OA = 5$ सेमी, $OC = 4$ सेमी

ΔOCA में, $OA^2 = OC^2 + AC^2$

$\Rightarrow$ $(5)^2 = (4)^2 + AC^2$

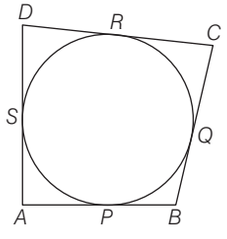
$\Rightarrow$ $AC^2 = 25 - 16$

$\Rightarrow$ $AC^2 = 9$

$\Rightarrow$ $AC = 3$

$\therefore$ जीवा $(AB) = 2 \times AC = 2 \times 3 = 6$ सेमी

7. चित्र में, चतुर्भुज $ABCD$ की चारों भुजाएँ किसी वृत्त को स्पर्श करती हैं जिसमें $AB = 6$ सेमी, $BC = 7$ सेमी और $CD = 4$ सेमी हो, तो AD का मान ज्ञात कीजिए।



हल स्पर्शी युग्मों में,

$CR = CQ$ ...(i)

$DR = DS$ ...(ii)

$AP = AS$ ...(iii)

तथा $BP = BQ$ ...(iv)

समी (i), (ii), (iii) तथा (iv) को जोड़ने पर,

$CR + DR + AP + BP = CQ + DS + AS + BQ$

$\Rightarrow (CR + DR) + (AP + BP) = (CQ + BQ) + (AS + DS)$

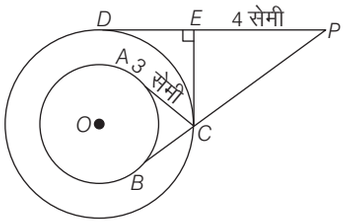
$\Rightarrow$ $CD + AB = BC + AD$

$\Rightarrow$ $4 + 6 = 7 + AD$

$\Rightarrow$ $AD = 10 - 7$

$\Rightarrow$ $AD = 3$ सेमी

8. केन्द्र O वाले दो संकेन्द्रीय वृत्तों पर बिन्दु P से दो स्पर्श रेखाएँ PB और PD खींची गई हैं बिन्दु C से छोटे वृत्त पर स्पर्श रेखा खींची गई है तथा $CE \perp PD$ है। यदि $CA = 3$ सेमी $PE = 4$ सेमी और $PB = 8$ सेमी है, तो PD की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



हल दिया है, $CB = CA = 3$ सेमी [स्पर्शी]

$\because$ $PB = 8$

$\therefore$ $PC = PB - CB = 8 - 3 = 5$ सेमी

ΔPEC में, $PC^2 = PE^2 + CE^2$

$\Rightarrow$ $(5)^2 = (4)^2 + CE^2$

$\Rightarrow$ $CE^2 = 25 - 16$

$\Rightarrow$ $CE^2 = 9$

$\Rightarrow$ $CE = 3$ सेमी

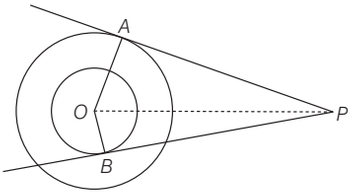
$\Rightarrow$ $EC = ED = 3$

[$\because$ एक ही वृत्त के समान बिन्दु से स्पर्शी हैं]

अब, $PD = PE + ED = 4 + 3$

$= 7$ सेमी

9. चित्र में, O केन्द्र तथा 5 सेमी और 3 सेमी वाले दो संकेन्द्रीय वृत्त हैं। एक बाह्य बिन्दु P से, इन वृत्तों पर स्पर्श रेखाएँ PA तथा PB खींची गई यदि $AP = 12$ सेमी हो, तो BP की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



हल दिया है, $AP = 12$ सेमी तथा $OA = 5$ सेमी

ΔOAP में, $OP^2 = OA^2 + AP^2$

$\Rightarrow$ $OP^2 = 25 + 144$

$\Rightarrow$ $OP^2 = 169$

$\Rightarrow$ $OP = 13$

अब, ΔOBP में,

$OP^2 = OB^2 + BP^2$

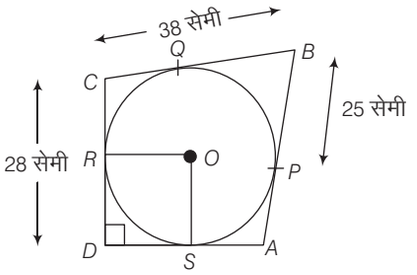
$\Rightarrow$ $(13)^2 = (3)^2 + BP^2$

$\Rightarrow$ $BP^2 = 169 - 9$

$\Rightarrow$ $BP^2 = 160$

$\Rightarrow$ $BP = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$ सेमी

10. दी गई आकृत्ति में, $ABCD$ एक चतुर्भुज है, जिससे $\angle ADC = 90°$, $BC = 38$ सेमी, $CD = 28$ सेमी और $BP = 25$ सेमी है। केन्द्र O वाले वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।



हल स्पर्शी युग्म से, $BQ = BP = 25$ सेमी

$\because$ $BC = 38$ सेमी

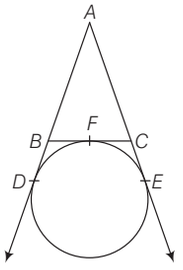
$\therefore$ $CQ = BC - BQ = 38 - 25 = 13$ सेमी

$\because$ $CR = CQ = 13$ सेमी

$\therefore$ $RD = CD - CR = 28 - 13 = 15$ सेमी

$\because$ चित्र से वृत्त की त्रिज्या $= OS = RD = 15$ सेमी

11. आकृत्ति में, एक वृत्त ΔABC की भुजा BC को F पर स्पर्श करता है तथा भुजाओं AB और AC को बढ़ाने पर क्रमशः D और E पर स्पर्श करता है। यदि $AD = 8$ सेमी है, तो ΔABC का परिमाप ज्ञात कीजिए।



हल $\because$ AE तथा AD स्पर्श रेखाएँ हैं।

$\therefore$ $AE = AD = 8$ ...(i)

स्पर्शी युग्म से,

$$\left.\begin{aligned} CF &= CE \\ \text{तथा} \quad BF &= BD \end{aligned}\right\} \quad \text{...(ii)}$$

ΔABC का परिमाप $= AB + BC + AC$

$= AB + BF + FC + AC$

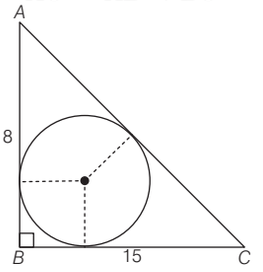
$= AB + BD + CE + AC$ [समी (ii) से]

$= AD + AF = 8 + 8 = 16$ सेमी

12. एक समकोण ΔABC, जिसमें $\angle B = 90°$ है, में एक अन्तः वृत्त खींचा गया है। यदि $AB = 8$ सेमी, $BC = 15$ सेमी, तब वृत्त का व्यास ज्ञात कीजिए।

हल समकोण ΔABC में,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$



$\Rightarrow$ $AC^2 = (8)^2 + (15)^2$

$\Rightarrow$ $AC^2 = 64 + 225 \Rightarrow AC^2 = 289$

$\Rightarrow$ $AC = 17$ सेमी

अब, त्रिभुज का परिमाप $= 8 + 15 + 17 = 40$

त्रिभुज का अर्द्धपरिमाप $= \dfrac{40}{2} = 20$ सेमी

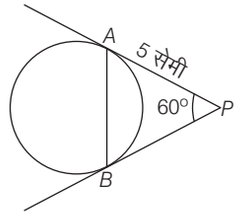
त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2} \times 15 \times 8 = 60$ सेमी

अन्तः वृत्त की त्रिज्या $= \dfrac{\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल}}{\text{त्रिभुज का परिमाप}}$

$= \dfrac{60}{20} = 3$ सेमी

अतः अन्तः वृत्त का व्यास $= 2 \times 3 = 6$ सेमी

13. दिए गए चित्र में, PA और PB दिए गए वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं जबकि $PA = 5$ सेमी तथा $\angle APB = 60°$, तब जीवा AB की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



हल ΔPAB में, $\angle APB = 60°$

तथा $PA = PB$ [स्पर्शी युग्म]

$\therefore$ $\angle PAB = \angle PBA = \dfrac{180° - 60°}{2} = 60°$

अर्थात् ΔPAB समबाहु है।

$\therefore$ $AB = PA$

$\Rightarrow$ $AB = 5$ सेमी

❐❐❐

11

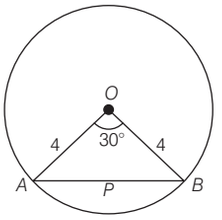
वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल

प्रश्नावली 1.1

1. त्रिज्या 4 सेमी और कोण 30° वाले त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल तथा संगत शेष वृत्तखण्ड का भी क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $r = 4$ सेमी, $\theta = 30°$

त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{\theta}{360°} \times \pi r^2$



$= \frac{30°}{360°} \times \frac{22}{7} \times (4)^2 = 4.19$ मी^{2}

संगत दीर्घ वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल

$= \pi r^2$ – त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल

$= \frac{22}{7} \times (4)^2 - 4.19$

$= 46.1$ सेमी^{2}

2. एक घड़ी की घण्टे की सूई 7 सेमी लम्बी है। घण्टे की सूई द्वारा 1 घण्टे में कवर किया गया क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल घण्टे की सूई द्वारा 1 घण्टे में अन्तरित कोण

$= \frac{360°}{12} = 30°$

1 घण्टे में कवर किया गया क्षेत्रफल

$= \frac{\theta}{360°} \times \pi r^2$

$= \frac{30°}{360°} \times \frac{22}{7} \times (7)^2$

$= 12.83$ सेमी^{2}

3. एक घड़ी मिनट की सूई की लम्बाई 12 सेमी है। सुबह 9 : 00 से 9 : 35 तक इस सुई द्वारा रचित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल घड़ी की मिनट की सूई की लम्बाई

$= 12$ सेमी $= r$

सुबह 9 : 00 से 9 : 35 तक अर्थात् 35 मिनट में

मिनट की सूई द्वारा घूमा गया कोण

$= 35 \times 6° = 210° = (\theta)$

$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल $= \frac{\theta}{360°} \times \pi r^2$

$= \frac{210°}{360°} \times \frac{22}{7} \times 12 \times 12$

$= 264$ सेमी^{2}

4. 21 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त के केन्द्र पर एक चाप द्वारा बनाया गया कोण 60° है। चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

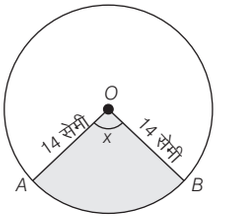
हल दिया है, $r = 21$ सेमी, $\theta = 60°$

$\therefore$ चाप की लम्बाई $= \frac{\theta}{360°} \times 2\pi r$

$= \frac{60°}{360°} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 21$

$= 22$ सेमी

5. दी गई आकृति में केन्द्र O वाले वृत्त की त्रिज्या 14 सेमी है। चाप AB की लम्बाई 13.2 सेमी है। वृत्त के छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल दिया है, $r = 14$ सेमी तथा $L = 13.2$ सेमी

माना $\theta = x$

$\because$ $L = \frac{\theta}{360°} \times 2\pi r$

$\Rightarrow$ $13.2 = \frac{x}{360°} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 14$

$\Rightarrow$ $x = \frac{13.2 \times 360° \times 7}{2 \times 22 \times 14} \Rightarrow x = 54°$

$\therefore$ छायांकित भाग का क्षेत्रफल $= \frac{\theta}{360°} \times \pi r^2$

$= \frac{x}{360°} \times \pi r^2 = \frac{54°}{360°} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14$

$= 92.4$ सेमी^{2}

6. त्रिज्या 14 सेमी वाले एक वृत्त के त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल 24.5π सेमी^{2} है। इस त्रिज्यखण्ड के संगत चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $r = 14$ सेमी

तथा त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= 24.5\pi$ सेमी^{2}

$$\Rightarrow \quad \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2 = 24.5\pi$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\theta}{360^\circ} \times 14 \times 14 = 24.5$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \frac{24.5 \times 360^\circ}{14 \times 14}$$

$$\therefore \quad \theta = 45^\circ$$

अब, संगत चाप की लम्बाई

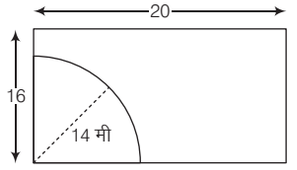
$$L = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r$$

$$= \frac{45^\circ}{360^\circ} \times 2 \times \pi \times 14$$

$$= \frac{1}{4} \times 2 \times \pi \times 14 = 7\pi \text{ सेमी}$$

7. एक गाय 20 मी $\times$ 16 मी विमाओं वाले आयताकार मैदान के कोने में 14 मी लम्बी रस्सी से बाँध दी गई है। उस मैदान का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसमें गाय घास चर सकती है।

हल अभीष्ट क्षेत्रफल = त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल



$$= \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$$

$$= \frac{90^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14$$

$$= 154 \text{ मी}^2$$

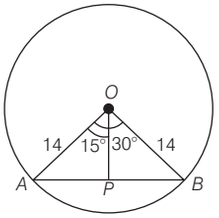
8. त्रिज्या 14 सेमी वाले एक वृत्त के एक वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जबकि उसके संगत त्रिज्यखण्ड का कोण 30° है।

हल दिया है, $r = 14$ सेमी, $\theta = 30^\circ$

त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{30^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2$

$$= \frac{30^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14$$

$$= \frac{154}{3} \text{ सेमी}^2$$



ΔOAP में, $\sin 15^\circ = \frac{AP}{14}$

$$\Rightarrow \quad AP = 14 \sin 15^\circ$$

$$\Rightarrow \quad AP = 14 \times \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad AB = 2AP = \frac{2 \times 14(\sqrt{3} - 1)}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{14(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{2}}$$

तथा $\cos 15^\circ = \frac{OP}{14}$

$$\Rightarrow \quad OP = 14 \cos 15^\circ = \frac{14(\sqrt{3} + 1)}{2\sqrt{2}}$$

अब, ΔOAB का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times AB \times OP$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{14(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{2}} \times \frac{14(\sqrt{3} + 1)}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{14 \times 14(3 - 1)}{4 \times 2} = 49 \text{ सेमी}^2$$

$\therefore$ लघु वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल

= त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $-$ ΔAOB का क्षेत्रफल

$$= \frac{154}{3} - 49$$

$$= \frac{154 - 147}{3} = \frac{7}{3} \text{ सेमी}^2$$

9. 20 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त की एक जीवा केन्द्र पर 90° का कोण बनाती है। वृत्त के संगत दीर्घ वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.144$)

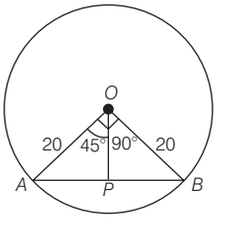
हल दिया है, $r = 20$ सेमी

तथा $\theta = 90^\circ$

त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$

$$= \frac{90^\circ}{360^\circ} \times 3.144 \times 20 \times 20$$

$$= 314.4 \text{ सेमी}^2$$



ΔOAP में,

$$\sin 45^\circ = \frac{AP}{OA}$$

$$\Rightarrow \quad AP = OA \sin 45^\circ = \frac{20}{\sqrt{2}}$$

$\therefore \quad AB = 2AP = 2 \times \frac{20}{\sqrt{2}} = \frac{40}{\sqrt{2}}$

तथा $\cos 45° = \frac{OP}{20} \Rightarrow OP = \frac{20}{\sqrt{2}}$

ΔOAB का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times AB \times OP$

$= \frac{1}{2} \times \frac{40}{\sqrt{2}} \times \frac{20}{\sqrt{2}}$

$= 200$ सेमी^{2}

लघु वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल = संगत त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $- \Delta OAB$ का क्षेत्रफल

$= 314.4 - 200 = 114.4$ सेमी^{2}

अब, दीर्घ वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल

$= \pi r^2 -$ लघु वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल

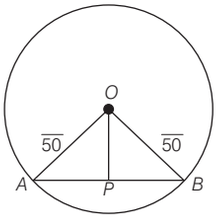
$= 3.144 \times (20)^2 - 114.4$

$= 1257.6 - 114.4 = 1143.2$ सेमी^{2}

10. 10 सेमी लम्बाई की जीवा वृत्त में खींची गई है जिसकी त्रिज्या $\sqrt{50}$ सेमी है। वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $r = \sqrt{50}$ सेमी

तथा जीवा $AB = 10$ सेमी



ΔOAB में,

$AB^2 = OA^2 + OB^2$

$\therefore \quad \angle AOB = 90° = (\theta)$

त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल

$= \frac{\theta}{360°} \times \pi r^2$

$= \frac{90°}{360°} \times \frac{22}{7} \times (\sqrt{50})^2$

$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 50$

$= \frac{275}{7}$ सेमी^{2}

ΔOAB का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times OA \times OB$

[$\because$ समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ लम्ब]

$= \frac{1}{2} \times \sqrt{50} \times \sqrt{50} = 25$ सेमी^{2}

लघु वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल

= त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $- \Delta OAB$ का क्षेत्रफल

$= \frac{275}{7} - 25$

$= \frac{275 - 175}{7} = \frac{100}{7}$

$= 14.28$ सेमी^{2}

❐❐❐

12

पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

प्रश्नावली 12.1

1. 6 सेमी भुजा वाले 5 घनों के संलग्न फलकों को मिलाकर एक घनाभ बनाया जाता है। इस प्रकार प्राप्त घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल बनाए गए घनाभ की लम्बाई,

l 5 6 30 सेमी

चौड़ाई, b 6 सेमी

तथा ऊँचाई, h 6 सेमी

प्राप्त घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$2(lb \quad bh \quad hl)$

$2(30 \quad 6 \quad 6 \quad 6 \quad 6 \quad 30)$

$2(180 \quad 36 \quad 180)$

$2 \quad 396 \quad 792$ सेमी^{2}

2. एक ठोस गेंद एक घनाकार बक्से में पूरी तरह समाहित हो जाती है। यदि घनाकार बक्से के किनारे की लम्बाई a है, तो घनाकार बक्से में बचे हुए भाग का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, घन की भुजा a

गेंद का व्यास a, गेंद की त्रिज्या $\frac{a}{2}$

घनाकार बक्से में बचे हुए भाग का आयतन

घन का आयतन गेंद का आयतन

$(a)^3 \quad \frac{4}{3} \quad \frac{a}{2}^3$ [$\because$ गोले का आयतन $\frac{4}{3} \quad r^3$

$a^3 \quad \frac{a^3}{6} \quad \frac{a^3}{6}(6 \quad)$ सेमी^{3}

3. एक घन का किनारा 4.2 सेमी है। इस घन से काटे जा सकने वाले बड़े-से-बड़े लम्बवृत्तीय शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, घन की कोर 4.2 सेमी

घन से काटे गए शंकु की त्रिज्या,

$r \quad \frac{4.2}{2} \quad 2.1$ सेमी

शंकु की ऊँचाई, h 4.2 सेमी

शंकु का आयतन $\frac{1}{3} \quad r^2h$

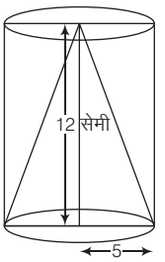
$\frac{1}{3} \quad \frac{22}{7} \quad (2.1)^2 \quad 4.2$

19.4 सेमी^{3} (लगभग)

4. एक वृत्ताकार बेलन से जिसका व्यास 10 सेमी तथा ऊँचाई 12 सेमी है, को अन्दर की ओर काटकर एक शंकु के आकार का गड्ढ़ा इस प्रकार बनाया जाता है कि शंकु के आधार की त्रिज्या बेलन के आधार की त्रिज्या तथा शंकु की ऊँचाई बेलन की ऊँचाई के बराबर है। ठोस के शेष भाग का आयतन ज्ञात करें। (3.14)

हल दिया है, बेलन का व्यास 10 सेमी

त्रिज्या $(r) \quad \frac{10}{2} \quad 5$ सेमी



प्रश्नानुसार, बेलन की ऊँचाई, h 12 सेमी

शंकु की ऊँचाई, H 12 सेमी

तथा शंकु की त्रिज्या, R 5 सेमी

शेष भाग का आयतन बेलन का आयतन शंकु का आयतन

$r^2h \quad \frac{1}{3} \quad R^2H$

$3.14 \quad (5)^2 \quad 12 \quad \frac{1}{3} \quad 3.14 \quad (5)^2 \quad 12$

$942 \quad 314 \quad 628$ सेमी^{3}

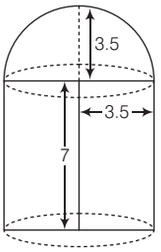
5. एक पात्र जोकि बेलन के ऊपर उसी त्रिज्या के बराबर अर्द्धगोला आरोपित करके बनाया गया है। यदि बेलन की भीतरी ऊँचाई 7 मी तथा बेलन की भीतरी त्रिज्या 3.5 मी हो, तो पात्र का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, बेलन की त्रिज्या,

$r \quad 3.5$ मी

तथा बेलन की ऊँचाई 7 मी

अर्द्धगोले की त्रिज्या, R 3.5 मी



पात्र का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल बेलन का वक्रपृष्ठ

अर्द्धगोले का वक्रपृष्ठ बेलन के एक सिरे का क्षेत्रफल

$2\ rh \quad 2\ R^2 \quad r^2$

$2 \quad \frac{22}{7} \quad 3.5 \quad 7 \quad 2 \quad \frac{22}{7} \quad 3.5 \quad 3.5$

$\frac{22}{7} \quad 3.5 \quad 3.5$

$154 \quad 77 \quad 38.50 \quad 269.5$ मी^{2}

6. एक पात्र का निचला सिरा अर्द्धगोलाकार तथा ऊपरी सिरा बेलनाकार है। यदि अर्द्धगोले का व्यास 16 सेमी है और पात्र की कुल ऊँचाई 15 सेमी हो, तो पात्र की क्षमता ज्ञात कीजिए। $\frac{22}{7}$ लीजिए

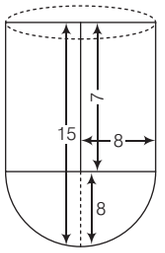
हल दिया है, अर्द्धगोले का व्यास 16 सेमी

त्रिज्या, r 8 सेमी

पात्र की कुल ऊँचाई 15 सेमी

बेलन की ऊँचाई, h $15 \quad 8 \quad 7$ सेमी

तथा बेलन की त्रिज्या, R 8 सेमी



पात्र की क्षमता (या आयतन)

अर्द्धगोले का आयतन बेलन का आयतन

$\frac{2}{3} \quad r^3 \quad R^2h$

$\frac{2}{3} \quad \frac{22}{7} \quad (8)^3 \quad \frac{22}{7} \quad (8)^2 \quad 7$

$\frac{1}{3} \quad \frac{22}{7} \quad (8)^2\ [16 \quad 21]$

$\frac{1}{3} \quad \frac{22}{7} \quad 64 \quad 37$

2480.7619 सेमी^{3}

7. एक लकड़ी की वस्तु जिसे घनाकार लकड़ी के ब्लॉक में अर्द्धगोला खोदकर बनाया गया है। यदि घन का प्रत्येक किनारा 10 सेमी तथा अर्द्धगोले के आधार का व्यास 7 सेमी है, तो लकड़ी की वस्तु का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, घन की कोर (a) 10 सेमी

तथा अर्द्धगोले का व्यास 7 सेमी

त्रिज्या (r) $\frac{7}{2}$ सेमी

वस्तु का आयतन घन का आयतन अर्द्धगोले का आयतन

$(a)^3 \quad \frac{2}{3} \quad r^3$

$(10)^3 \quad \frac{2}{3} \quad \frac{22}{7} \quad \frac{7}{2}^{\ 3}$

$1000 \quad 89.83$

910.17 सेमी^{3}

8. लकड़ी के एक घनाकार ब्लॉक के एक फलक को अन्दर की ओर से काटकर एक अर्द्धगोलीय गड्ढ़ा इस प्रकार बनाया गया है कि अर्द्धगोले का व्यास 4 इकाई, घन के एक किनारे के बराबर है। ठोस के शेष भाग का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, अर्द्धगोले का व्यास 4 इकाई

त्रिज्या, r 2

तथा घन की कोर, a 4 इकाई

शेष भाग का पृष्ठीय क्षेत्रफल

घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल अर्द्धगोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

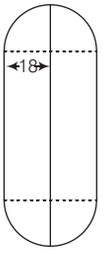
$6a^2 \quad r^2$

$6\,(4)^2 \quad (2)^2 \quad 96 \quad 4$

$4\,(24 \quad)$ वर्ग इकाई

9. एक धातु के बेलन के वृतीय सिरों पर समान आधार के अर्द्धगोले चिपके हुए हैं, ठोस की सम्पूर्ण लम्बाई 108 सेमी तथा अर्द्धगोले का व्यास 36 सेमी है। इस पर 7 पैसे प्रति वर्ग सेमी की दर से पॉलिश करवाने का खर्च ज्ञात कीजिए। $\frac{22}{7}$ लीजिए

हल दिया है, अर्द्धगोले का व्यास 36 सेमी



त्रिज्या (r) 18 सेमी

बेलन की त्रिज्या (R) 18 सेमी

ठोस की सम्पूर्ण ऊँचाई 108 सेमी

बेलन की ऊँचाई (h) 108 (2 18) 72 सेमी

ठोस का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

बेलन का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल 2 अर्द्धगोले का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल

$2\ Rh \quad 2 \quad 2\ r^2$

$2 \quad \frac{22}{7} \quad 18 \quad 72 \quad 4 \quad \frac{22}{7} \quad (18)^2$

$2 \quad \frac{22}{7} \quad 18\,(72 \quad 36)$

$2 \quad \frac{22}{7} \quad 18 \quad 108$ सेमी^{2}

7 पैसे प्रति वर्ग सेमी की दर से पॉलिश करवाने का खर्च

₹ $2 \quad \frac{22}{7} \quad 18 \quad 108 \quad \frac{7}{100}$ ₹ 855.36

10. एक गोलाकार काँच के बर्तन की गर्दन बेलनाकार है, जिसकी लम्बाई 7 सेमी तथा व्यास 4 सेमी है, जबकि गोलाकार भाग का व्यास 21 सेमी है। इस बर्तन में भरी जा सकने वाली पानी की मात्रा ज्ञात कीजिए। $\frac{22}{7}$

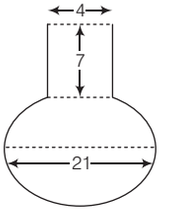
हल दिया है, बेलन की ऊँचाई (h) 7 सेमी

तथा बेलन का व्यास 4 सेमी

त्रिज्या r) 2 सेमी

तथा गोले का व्यास 21 सेमी

त्रिज्या (R) $\frac{21}{2}$ सेमी



बर्तन में भरे जाने वाले पानी की मात्रा

बेलनाकार भाग का आयतन गोलाकार भाग का आयतन

$r^2h \quad \frac{4}{3} \quad R^3$

$\frac{22}{7} \quad (2)^2 \quad 7 \quad \frac{4}{3} \quad \frac{22}{7} \quad \frac{21}{2}^{\ 3}$

88 4851 4939 सेमी^{3}

11. एक टैन्ट 3 मी ऊँचाई तक लम्बवृतीय बेलनाकार है। उसके बाद का ऊपरी हिस्सा शंक्वाकार है। यदि शंकु के शीर्ष की जमीन से ऊँचाई 13.5 मी और आधार की त्रिज्या 14 मी हो, तो ₹ 2 प्रति वर्ग मी की दर से टैन्ट को अन्दर से पेन्ट करवाने का खर्च ज्ञात कीजिए।

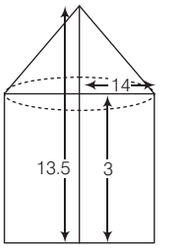
हल दिया है, बेलन की ऊँचाई (h) 3 मी

बेलन की त्रिज्या (r) 14 मी

टैन्ट की कुल ऊँचाई 13.5 मी

शंकु की ऊँचाई (H) 13.5 3 10.5 मी

शंकु की त्रिज्या (R) 14 मी



शंकु की तिर्यक ऊँचाई, $l^2 \quad R^2 \quad H^2$

$l^2 \quad (14)^2 \quad (10.5)^2$

$l^2 \quad 196 \quad 110.25$

$l^2 \quad 306.25$

$l \quad 17.5$ मी

टैन्ट का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल बेलन का वक्रपृष्ठ शंकु का वक्रपृष्ठ

$2\ rh \quad Rl$

$2 \quad \frac{22}{7} \quad 14 \quad 3 \quad \frac{22}{7} \quad 14 \quad 17.5$

264 770 1034

टैन्ट पर पेन्ट करवाने का खर्च ₹ 2 1034

₹ 2068

12. एक कलमदान घनाभ के आकार की लकड़ी से बना है जिसमें कलम रखने के लिए चार शंक्वाकार गड्ढ़े बनाए गए हैं। घनाभ की विमाएँ 10 सेमी, 5 सेमी तथा 4 सेमी हैं। प्रत्येक गड्ढ़े का व्यास 0.5 सेमी तथा गहराई 2.1 सेमी है। पूरे कलमदान में लकड़ी का आयतन ज्ञात कीजिए। ***(NCERT Exemplar)***

हल दिया है, घनाभ की विमाएँ l 10 सेमी, b 5 सेमी, h 4 सेमी

तथा शंकु का व्यास 0.5 सेमी

त्रिज्या (r) $\frac{0.5}{2} \quad \frac{1}{4}$ सेमी

शंकु की गहराई (या ऊँचाई),

h 2.1 सेमी

कलमदान में लगी लकड़ी का आयतन

घनाभ का आयतन 4 एक शंक्वाकार गड्ढ़े का आयतन

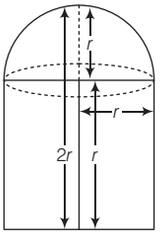
$lbh \quad 4 \quad \frac{1}{3} \quad r^2h$

$10 \quad 5 \quad 4 \quad 4 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{22}{7} \quad \frac{1}{4}^{\ 2} \quad 2.1$

200 0.55 199.45 सेमी^{3}

13. एक बेलनाकार भवन के ऊपर के अर्द्धगोलाकार गुम्बद है, और उसमें उपस्थित हवा का आयतन $41\frac{19}{21}$ मी^{3} है। यदि गुम्बद का आन्तरिक व्यास भवन की कुल ऊँचाई के बराबर हो, तो भवन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल माना भवन का आन्तरिक व्यास $2r$



तब, त्रिज्या r

अर्थात् अर्द्धगोले की त्रिज्या बेलन की त्रिज्या r

प्रश्नानुसार, भवन की कुल ऊँचाई $2r$

बेलन की ऊँचाई, h r

भवन में हवा का आयतन बेलन का आयतन अर्द्धगोले का आयतन

$$41\frac{19}{21} \quad r^2h \quad \frac{2}{3} \quad r^3$$

$$\frac{880}{21} \quad \frac{22}{7}r^2r \quad \frac{2}{3} \quad \frac{22}{7}r^3$$

$$\frac{880}{21} \quad \frac{22}{7}r^3 \quad 1 \quad \frac{2}{3}$$

$$\frac{880}{21} \quad \frac{22}{7}r^3 \quad \frac{5}{3}$$

$$r^3 \quad \frac{880 \quad 21}{21 \quad 110}$$

$$r^3 \quad 8$$

$$r \quad 2 \text{ सेमी}$$

भवन की ऊँचाई $2r$ 2 2 4 सेमी

14. एक ठोस शंकु में एक अर्द्धगोला इस प्रकार से रखा जाता है कि शंकु का केन्द्र और अर्द्धगोले के आधार के केन्द्र एकसाथ हों। शंकु की तिरछी ऊँचाई L और शंकु के आधार की त्रिज्या $\frac{r}{2}$ है तथा $\frac{r}{4}$ अर्द्धगोले की त्रिज्या है। सिद्ध कीजिए कि ठोस का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $\frac{}{8}(3r \quad 4L)\,r$ वर्ग इकाई है।

हल यहाँ, शंकु की त्रिज्या r $\frac{r}{2}$

शंकु की तिर्यक ऊँचाई, l L

अर्द्धगोले की त्रिज्या (R) $\frac{r}{4}$

ठोस का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठ अर्द्धगोले का वक्रपृष्ठ

$$r(L \quad r) \quad 2\ R^2$$

$$\frac{r}{2} \ L \ \frac{r}{2} \quad 2\ \frac{r^2}{16}$$

$$\frac{rL}{2} \quad \frac{r^2}{4} \quad \frac{r^2}{8}$$

$$\frac{rL}{2} \quad \frac{3\ r^2}{8}$$

$\frac{}{8}(3r \quad 4L)r$ वर्ग इकाई **इति सिद्धम्**

13

सांख्यिकी

प्रश्नावली 13.1

1. निम्न बारम्बारता बंटन का प्रत्यक्ष विधि से माध्य ज्ञात कीजिए।

वर्ग अन्तराल	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
मजदूरों की संख्या	7	10	15	8	10

हल

वर्ग अन्तराल	मजदूरों की संख्या (f_i)	वर्ग का मध्यमान (x_i)	$f_i x_i$
0-10	7	$\frac{0+10}{2}$ 5	35
10-20	10	$\frac{10+20}{2}$ 15	150
20-30	15	$\frac{20+30}{2}$ 25	375
30-40	8	$\frac{30+40}{2}$ 35	280
40-50	10	$\frac{40+50}{2}$ 45	450
	f_i 50		$f_i x_i$ 1290

समान्तर माध्य $(\overline{X})$ $\frac{f_i x_i}{f_i}$ $\frac{1290}{50}$ 25.8

2. निम्न बारम्बारता बंटन का प्रत्यक्ष विधि से माध्य ज्ञात कीजिए।

वर्ग अन्तराल	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75
बारम्बारता	6	10	8	12	4

हल

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता (f_i)	वर्ग का मध्यमान (x_i)	$f_i x_i$
25-35	6	$\frac{25+35}{2}$ 30	180
35-45	10	$\frac{35+45}{2}$ 40	400
45-55	8	$\frac{45+55}{2}$ 50	400
55-65	12	$\frac{55+65}{2}$ 60	720
65-75	4	$\frac{65+75}{2}$ 70	280
	f_i 40		$f_i x_i$ 1980

समान्तर माध्य $(\overline{X})$ $\frac{f_i x_i}{f_i}$ $\frac{1980}{40}$ 49.5

3. निम्न बारम्बारता बंटन का माध्य परिकलित कीजिए।

वर्ग	10-30	30-50	50-70	70-90	90-110
बारम्बारता	15	18	25	10	2

हल

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता (f_i)	मध्यमान (x_i)	$f_i x_i$
10-30	15	$\frac{10+30}{2}$ 20	300
30-50	18	$\frac{30+50}{2}$ 40	720
50-70	25	$\frac{50+70}{2}$ 60	1500
70-90	10	$\frac{70+90}{2}$ 80	800
90-110	2	$\frac{90+110}{2}$ 100	200
	f_i 70		$f_i x_i$ 3520

समान्तर माध्य $(\overline{X})$ $\frac{f_i x_i}{f_i}$ $\frac{3520}{70}$ 50.28

4. निम्न बारम्बारता बंटन का प्रत्यक्ष विधि से माध्य ज्ञात कीजिए।

वर्ग अंतराल	7.5-12.5	12.5- 17.5	17.5- 22.5	22.5- 27.5	27.5- 32.5
बारम्बारता	5	10	7	8	2

हल

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता (f_i)	मध्यमान (x_i)	$f_i x_i$
7.5-12.5	5	$\frac{7.5+12.5}{2}$ 10	50
12.5-17.5	10	$\frac{12.5+17.5}{2}$ 15	150
17.5-22.5	7	$\frac{17.5+22.5}{2}$ 20	140
22.5-27.5	8	$\frac{22.5+27.5}{2}$ 25	200
27.5-32.5	2	$\frac{27.5+32.5}{2}$ 30	60
	f_i 32		$f_i x_i$ 600

समान्तर माध्य $(\overline{X})$ $\frac{f_i x_i}{f_i}$ $\frac{600}{32}$ 18.75

5. निम्नलिखित आँकड़ों का माध्य परिकलित कीजिए।

वर्ग	4-7	8-11	12-15	16-19
बारम्बारता	5	4	9	10

हल प्रश्न 3 की भाँति स्वयं हल करें।

6. निम्नलिखित बारम्बारता बंटन का कल्पित माध्य विधि से माध्य ज्ञात कीजिए।

वर्ग अन्तराल	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60
बारम्बारता	14	22	16	6	5	3	4

हल

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता (f_i)	वर्ग चिह्न (x_i)	विचलन d_i x_i a	$f_i d_i$
25-30	14	27.5	15	210
30-35	22	32.5	10	220
35-40	16	37.5	5	80
40-45	6	42.5 a	0	0
45-50	5	47.5	5	25
50-55	3	52.5	10	30
55-60	4	57.5	15	60
	f_i 70			$f_i d_i$ 395

समान्तर माध्य $(\overline{X})$ a $\frac{f_i d_i}{f_i}$ 42.5 $\frac{395}{70}$

42.5 5.64 36.86

7. किसी एक वर्ष में एक अस्पताल में दाखिल होने वाले अस्थमा के रोगियों की आयु का बंटन नीचे दिए गया है। इन रोगियों की आयु का माध्य ज्ञात कीजिए।

आयु (वर्षों में)	0-8	8-16	16-24	24-32	32-40	40-48	48-56	56-64
रोगियों की संख्या	6	25	12	13	11	14	11	8

हल

आयु (वर्षों में)	रोगियों की संख्या (f_i)	वर्ग चिह्न (x_i)	$f_i x_i$
0-8	6	4	24
8-16	25	12	300
16-24	12	20	240
24-32	13	28	364
32-40	11	36	396
40-48	14	44	616
48-56	11	52	572
56-64	8	60	480
	f_i 100		$f_i x_i$ 2992

समान्तर माध्य $(\overline{X})$ a $\frac{f_i x_i}{f_i}$

$\frac{2992}{100}$ 29.92

8. निम्नलिखित बारम्बारता बंटन का कल्पित माध्य विधि से माध्य ज्ञात कीजिए।

वर्ग	100-120	120-140	140-160	160-180	180-200
बारम्बारता	10	20	30	45	5

हल प्रश्न 6 की भाँति स्वयं हल करें।

9. कल्पित माध्य विधि का प्रयोग करके निम्न बारम्बारता बंटन का माध्य ज्ञात कीजिए।

वर्ग	63-65	66-68	69-71	72-74	75-77
बारम्बारता	4	3	7	8	3

हल प्रश्न 6 की भाँति स्वयं हल करें।

10. निम्न आँकड़ों का पद विचलन विधि से माध्य ज्ञात कीजिए।

वर्ग	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
बारम्बारता	17	28	32	24	19

हल यहाँ, वर्ग माप h 20, a 50

वर्ग	बारम्बारता (f_i)	वर्ग चिह्न (x_i)	u_i $\frac{x_i \ a}{h}$	$f_i x_i$
0-20	17	10	$\frac{10 \ 50}{20}$ 2	34
20-40	28	30	$\frac{30 \ 50}{20}$ 1	28
40-60	32	50 a	$\frac{50 \ 50}{20}$ 0	0
60-80	24	70	$\frac{70 \ 50}{20}$ 1	24
80-100	19	90	$\frac{90 \ 50}{20}$ 2	38
	f_i 120			$f_i u_i$ 0

समान्तर माध्य $(\overline{X})$ a $\frac{f_i u_i}{f_i}$ h

50 $\frac{0}{120}$ 50

11. किसी कक्षा के विद्यार्थियों का मासिक जेब खर्च निम्न बारम्बारता बंटन में दिया गया है।

जेब खर्चा	100-125	125-150	150-175	175-200	200-225
विद्यार्थियों की संख्या	14	8	12	5	11

पद विचलन विधि का प्रयोग करके विद्यार्थियों के जेब खर्चों का माध्य ज्ञात कीजिए।

हल प्रश्न 10 की भाँति स्वयं हल करें।

12. एक गणित टेस्ट में 20 विद्यार्थियों के निम्नलिखित प्राप्तांकों का माध्य ज्ञात कीजिए।

प्राप्तांक	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
विद्यार्थियों की संख्या	2	4	7	6	1

हल

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या (f_i)	मध्यमान (x_i)	$f_i x_i$
10-20	2	15	30
20-30	4	25	100
30-40	7	35	245
40-50	6	45	270
50-60	1	55	55
	f_i 20		$f_i x_i$ 700

समान्तर माध्य $(\overline{X})$ $\frac{f_i x_i}{f_i}$ $\frac{700}{20}$ 35

13. निम्न बंटन का माध्य ज्ञात कीजिए।

वर्ग	10-30	30-50	50-70	70-90	90-110
बारम्बारता	15	18	25	10	2

हल प्रश्न 12 की भाँति स्वयं हल करें।

14. निम्न बंटन का माध्य ज्ञात कीजिए।

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता
50-75	5
75-100	6
100-125	3
125-150	4
150-175	3
175-200	7
200-225	5
225-250	4
250-275	8
275-300	5

हल

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता (f_i)	वर्ग चिह्न (x_i)	u_i $\frac{x_i \ a}{h}$	$f_i u_i$
50-75	5	62.5	5	25
75-100	6	87.5	4	24
100-125	3	112.5	3	9
125-150	4	137.5	2	8
150-175	3	162.5	1	3
175-200	7	187.5 a	0	0
200-225	5	212.5	1	5
225-250	4	237.5	2	8
250-275	8	262.5	3	24
275-300	5	287.5	4	20
	f_i 50			$f_i u_i$ 12

यहाँ वर्ग माप (h) $25, a$ 187.5

समान्तर माध्य $(\overline{X})$ a $\frac{f_i u_i}{f_i}$ h

187.5 $\frac{12}{50}$ 25

187.5 6 181.5

15. निम्न सारणी में रविवार को एक विपणन केंद्र में गए 1000 व्यक्तियों की आयु दर्शायी गई है

आयु (वर्षों में)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
व्यक्तियों की संख्या	105	222	220	138	102	113	100

पद-विचलन विधि के प्रयोग से, उन व्यक्तियों की माध्य संख्या ज्ञात कीजिए, जो रविवार को उस विपणन केंद्र में गए।

हल प्रश्न 10 की भाँति स्वयं हल करें।

16. यदि निम्नलिखित बंटन का माध्य 54 है, तो लुप्त बारम्बारता x ज्ञात कीजिए।

वर्ग	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
बारम्बारता	16	14	24	26	x

हल दिया है, $\overline{X}$ 50

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता (f_i)	मध्यमान (x_i)	$f_i x_i$
0-20	16	10	160
20-40	14	30	420
40-60	24	50	1200
60-80	26	70	1820
80-100	x	90	$90x$
	f_i 80 x		$f_i x_i$ 3600 $90x$

समान्तर माध्य $(\overline{X})$ $\frac{f_i x_i}{f_i}$

$$54 \quad \frac{3600 \quad 90x}{80 \quad x}$$

$$4320 \quad 54x \quad 3600 \quad 90x$$

$$36x \quad 720$$

$$x \quad \frac{720}{36} \quad 20$$

17. यदि निम्न सारणी में विद्यार्थियों के प्राप्तांकों का समान्तर माध्य 25 अंक है, तो f का मान ज्ञात कीजिए।

प्राप्तांक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
विद्यार्थियों की संख्या	6	f	6	10	5

हल प्रश्न 16 की भाँति स्वयं हल करें।

18. नीचे दिए गए बंटन में लुप्त बारम्बारता p का मान ज्ञात कीजिए, जबकि दिया है कि बंटन का माध्य 52.4 है

वर्ग	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120
बारम्बारता	14	p	24	32	10	2

हल प्रश्न 16 की भाँति स्वयं हल करें।

19. यदि निम्नलिखित आँकड़ों का माध्य 15.45 है, तब p का मान ज्ञात कीजिए।

वर्ग	0-6	6-12	12-18	18-24	24-30
बारम्बारता	6	8	p	9	7

हल प्रश्न 16 की भाँति स्वयं हल करें।

20. निम्नलिखित बारम्बारता बंटन का माध्य 62.8 है और सभी बारम्बारताओं का योग 50 है। लुप्त बारम्बारताएँ f_1 और f_2 ज्ञात कीजिए।

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता
0-20	5
20-40	f_1
40-60	10
60-80	f_2
80-100	7
100-120	8
योग	50

हल दिया है, समान्तर माध्य 62.8

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता (f_i)	मध्यमान (x_i)	$f_i x_i$
0-20	5	10	50
20-40	f_1	30	$30f_1$
40-60	10	50	500
60-80	f_2	70	$70f_2$
80-100	7	90	630
100-120	8	110	880
	f_i 50 30 f_1 f_2		$f_i x_i$ 2060 $30f_i$ $70f_2$

$\because$ f_i 50 30 f_1 f_2

$$f_1 \quad f_2 \quad 20 \qquad \ldots(i)$$

$\because$ समान्तर माध्य $\frac{f_i x_i}{f_i}$

$$62.8 \quad \frac{2060 \quad 30f_1 \quad 70f_2}{50}$$

$$3140 \quad 2060 \quad 30f_1 \quad 70f_2$$

$$30f_1 \quad 70f_2 \quad 3140 \quad 2060$$

$$30f_1 \quad 70f_2 \quad 1080$$

$$3f_1 \quad 7f_2 \quad 108 \qquad [10 \text{ से भाग देने पर}] \ldots(ii)$$

समी (i) तथा समी (ii) को हल करने पर,

f_1 8 तथा f_2 12

प्रश्नावली 13.2

1. दिए गए आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

प्राप्तांक	0-20	20-40	40-60	60-80
बारम्बारता	15	6	18	10

हल

प्राप्तांक	0-20	20-40	40-60	60-80
बारम्बारता	15	6	18	10

यहाँ, अधिकतम वर्ग बारम्बारता 18 है जिसका संगत वर्ग 40 - 60 है।

अत: बहुलक वर्ग 40-60 है।

f_1 18, f_0 6, f_2 10, h 20, L 40

अब, बहुलक $L \quad \frac{f_1 \quad f_0}{2f_1 \quad f_0 \quad f_2} \quad h$

$40 \quad \frac{18 \quad 6}{36 \quad 6 \quad 10} \quad 20$

$40 \quad \frac{12}{20} \quad 20 \quad 40 \quad 12 \quad 52$

2. निम्न आँकड़ों के लिए, बहुलक ज्ञात कीजिए।

वर्ग	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11
बारम्बारता	14	16	4	4	2

हल

वर्ग अन्तराल	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11
बारम्बारता	14	16	4	4	2

यहाँ,अधिकतम वर्ग बारम्बारता 16है जिसका वर्ग 3-5 है।

अत: बहुलक वर्ग 3-5 है।

$f_1 \quad 16, f_0 \quad 14, f_2 \quad 4, L \quad 3, h \quad 2$

अब, बहुलक $L \quad \frac{f_1 \quad f_0}{2f_1 \quad f_0 \quad f_2} \quad h$

$3 \quad \frac{16 \quad 14}{32 \quad 14 \quad 4} \quad 2$

$3 \quad \frac{2}{14} \quad 2 \quad 3 \quad 0.28 \quad 3.28$

3. निम्न आँकडों के लिए, बहुलक ज्ञात कीजिए

अंक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
बारम्बारता	20	24	40	36	20

हल प्रश्न 1 व 2 की भाँति स्वयं हल करें।

4. निम्न सारणी एक अस्पताल में एक वर्ष के दौरान किसी निश्चित बीमारी से भर्ती होने वाले मरीजों से संबंधित आयु की बारम्बारता को दिखाती है।

आयु (वर्षों में)	मरीजों की संख्या
0-10	5
10-20	8
20-30	7
30-40	12
40-50	28
50-60	20
60-70	10
70-80	10

अधिकतम मरीजों की बहुलक आयु ज्ञात कीजिए।

हल

आयु (वर्षों में)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
मरीजों की संख्या	5	8	7	12	28	20	10	10

यहाँ, मरीजों की अधिकतम संख्या 28 है, जिसका संगत वर्ग 40-50 है।

अत: बहुलक वर्ग 40 - 50 है।

$f_1 \quad 28, f_0 \quad 12, f_2 \quad 20, \quad L \quad 40, h \quad 10$

अब, बहुलक $L \quad \frac{f_1 \quad f_0}{2f_1 \quad f_0 \quad f_2} \quad h$

$40 \quad \frac{28 \quad 12}{56 \quad 12 \quad 20} \quad 10$

$40 \quad \frac{16}{24} \quad 10$

$40 \quad 6.666$

46.67

5. 70 पैकेटों में चाय का वजन निम्नलिखित तालिका द्वारा दिखाया गया है।

वजन (ग्राम में)	पैकेटों की संख्या
200-201	13
201-202	27
202-203	18
203-204	10
204-205	1
205-206	1

उपरोक्त आँकड़ों का बहुलक वजन ज्ञात कीजिए।

हल प्रश्न 4 की भाँति स्वयं हल करें।

6. निम्नलिखित आँकड़ों का बहुलक 36 है, तब लुप्त बारम्बारता (x) ज्ञात कीजिए। (जबकि $x \quad 16$)

वर्ग	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
बारम्बारता	8	10	x	16	12	6	7

हल दिया है, बहुलक 36

वर्ग अन्तराल	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
बारम्बारता	8	10	x	16	12	6	7

यहाँ, अधिकतम वर्ग बारम्बारता 16 है, जिसका वर्ग अन्तराल 30 - 40 है।

अत: बहुलक वर्ग 30 - 40 है।

$L \quad 30, f_1 \quad 16, f_0 \quad x, f_2 \quad 12, h \quad 10$

अब, बहुलक $L \quad \frac{f_1 \quad f_0}{2f_1 \quad f_0 \quad f_2} \quad h$

$36 \quad 30 \quad \frac{16 \quad x}{32 \quad x \quad 12} \quad 10$

$36 \quad 30 \quad \frac{(16 \quad x)10}{20 \quad x}$

$6 \quad \frac{(16 \quad x)\,10}{20 \quad x}$

$120 \quad 6x \quad 160 \quad 10x$

$4x \quad 40$

$x \quad \frac{40}{4} \quad 10$

निर्देश प्रश्न 7, 8 तथा 9, प्रश्न 6 की भाँति स्वयं हल करें।

10. निम्न आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

वर्ग अन्तराल	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59
बारम्बारता	12	15	21	17	19	6

हल सर्वप्रथम वर्ग अन्तराल को सतत् रूप में लिखने पर,

सतत् वर्ग अन्तराल	0.5-9.5	9.5-19.5	19.5-29.5	29.5-39.5	39.5-49.5	49.5-59.5
बारम्बारता	12	15	21	17	19	6

यहाँ अधिकतम बारम्बारता 21 है जिसका वर्ग अन्तराल 19.5-29.5 है।

अत: बहुलक वर्ग 19.5-29.5 है।

$f_1 \quad 21, f_0 \quad 15, f_2 \quad 17, \; L \quad 19.5, h \quad 10$

अब, बहुलक $L \quad \frac{f_1 \quad f_0}{2f_1 \quad f_0 \quad f_2} \quad h$

$19.5 \quad \frac{21 \quad 15}{42 \quad 15 \quad 17} \quad 10$

$19.5 \quad \frac{6}{10} \quad 10 \quad 19.5 \quad 6 \quad 25.5$

प्रश्नावली 13.3

1. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए बारम्बारता बंटन सारणी बनाइए।

प्राप्तांक	10 से कम	20 से कम	30 से कम	40 से कम	50 से कम	60 से कम
विद्यार्थियों की संख्या	0	15	20	30	35	40

हल

प्राप्तांक (वर्ग)	विद्यार्थियों की संख्या बारम्बारता	विद्यार्थियों की संख्या बारम्बारता
0-10	0	0
10-20	15	15
20-30	5	20
30-40	10	30
40-50	5	35
50-60	5	40

2. नीचे दिए गए 'से अधिक प्रकार का' के संचयी बारम्बारता बंटन है

अंक	विद्यार्थियों की संख्या
60 से अधिक या बराबर	11
50 से अधिक या बराबर	23
40 से अधिक या बराबर	43
30 से अधिक या बराबर	58
20 से अधिक या बराबर	72
10 से अधिक या बराबर	82

उपरोक्त आँकड़ों को सतत् वर्गीकृत बारम्बारता बंटन में बदलें।

हल

अंक	विद्यार्थियों की संख्या (बारम्बारता)	विद्यार्थियों की संख्या (संचयी बारम्बारता)
10-20	10	10
20-30	14	24
30-40	15	39
40-50	20	59
50-60	12	71
60-70	11	82

3. एक स्कूल के अनुपस्थित छात्रों की संख्या प्रतिदिन 147 दिनों तक दर्ज की गई थी तथा प्राप्त आँकड़ों की सारणी निम्न बारम्बारता सारणी में प्रस्तुत है

अनुपस्थित छात्रों की संख्या	दिनों की संख्या
5	1
6	5
7	11
8	14
9	16
10	13
11	10

अनुपस्थित छात्रों की संख्या	दिनों की संख्या
12	70
13	4
15	1
18	1
20	1

उपरोक्त आँकड़ों की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

हल

अनुपस्थित छात्रों की संख्या	दिनों की संख्या	संचयी बारम्बारता
5	1	1
6	5	6
7	11	17
8	14	31
9	16	47
10	13	60
11	10	70
12	70	140
13	4	144
15	1	145
18	1	146
20	1	147
	N 147	

यहाँ, N 147

माध्यिका $\frac{N}{2}$ $\frac{1}{2}$ वें पद का मान

$\frac{147}{2}$ $\frac{1}{2}$ वें पद का मान

$\frac{148}{2}$ वें पद का मान

74 वें पद का मान 12

4. निम्नलिखित बारम्बारता बंटन का माध्यक ज्ञात कीजिए।

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	2	3	6	8	16	12	10	13	9	15

हल प्रश्न 3 की भाँति स्वयं हल करें।

5. निम्नलिखित तालिका से 25 शहरों की साक्षरता दर को (% दर से) दर्शाया गया है।

साक्षरता दर (प्रतिशत में)	50-60	60-70	70-80	80-90
शहरों की संख्या	9	6	8	2

माध्यक वर्ग तथा बहुलक वग्र ज्ञात कीजिए।

हल प्रश्न 3 की भाँति स्वयं हल करें।

साक्षरता दर (प्रतिशत में)	शहरों की संख्या	संचयी बारम्बारता
50-60	9	9
60-70	6	15
70-80	8	23
80-90	2	25
	N 25	

यहाँ, N 25

माध्यक वर्ग के लिए, $\frac{N}{2}$ $\frac{25}{2}$ 12.5

[जो संचयी बारम्बारता 15 के अन्तर्गत आता है]

माध्यक वर्ग 60-70 है।

यहाँ, अधिकतम बारम्बारता 9 है जिसका वर्ग 50 - 60 है।

अत: बहुलक वर्ग 50-60 है।

6. निम्नलिखित बारम्बारता बंटन से, माध्यक वर्ग की ऊपरी सीमा ज्ञात कीजिए।

वर्ग अन्तराल	0-8	8-16	16-24	24-32	32-40	40-48
बारम्बारता	7	9	10	8	12	8

हल

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता
0-8	7	7
8-16	9	16
16-24	10	26
24-32	8	34
32-40	12	46
40-48	8	54
	N 54	

यहाँ, N 54, जोकि सम संख्या है।

माध्यक वर्ग के लिए, $\frac{N}{2}$ $\frac{54}{2}$ 27

[जो संचयी बारम्बारता 34 के अन्तर्गत आता है]

माध्यक वर्ग 24 - 32

माध्यक वर्ग की ऊपरी सीमा 32

7. निम्नलिखित बंटन से माध्यक की गणना कीजिए।

वर्ग	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45
बारम्बारता	5	6	15	16	5	4	2	2

हल

वर्ग	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता
5-10	5	5
10-15	6	11
15-20	15	26
20-25	16	42
25-30	5	47
30-35	4	51
35-40	2	53
40-45	2	55
	N 55	

यहाँ, N 55

माध्यक वर्ग के लिए, $\frac{N}{2}$ $\frac{55}{2}$ 27.5

[जो संचयी बारम्बारता 42 के अन्तर्गत आता है]

माध्यक वर्ग 20- 25 है।

अत: f 16, cf 26, L 20, h 5

अब, माध्यक L $\frac{\frac{N}{2} \quad cf}{f}$ h

20 $\frac{\frac{55}{2} \quad 26}{16}$ 5

20 $\frac{27.5 \quad 26}{16}$ 5

20 $\frac{1.5 \quad 5}{16}$ 20 0.47 20.47

8. कक्षा X के कुछ विद्यार्थियों द्वारा वृद्ध लोगों की सहायता के लिए दान दिया गया। उनके द्वारा दिया गया योगदान निम्न बारम्बारता बंटन में दर्शाया गया है

राशि (₹ में)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
विद्यार्थियों की संख्या	5	8	12	11	4

उनके योगदान के माध्यक तथा बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल

राशि (₹ में)	विद्यार्थियों की संख्या	संचयी बारम्बारता
0-20	5	5
20-40	8	13
40-60	12	25
60-80	11	36
80-100	4	40
	N 40	

यहाँ, N 40

माध्यक वर्ग के लिए, $\frac{N}{2}$ $\frac{40}{2}$ 20

[जोकि संचयी बारम्बारता 25 के अन्तर्गत आता है]

माध्यक वर्ग 40-60 है।

अब, L 40, cf 143, h 20, f 12

माध्यक L $\frac{\frac{N}{2} \quad cf}{f}$ h

40 $\frac{\frac{40}{2} \quad 13}{12}$ 20

40 $\frac{7 \quad 20}{12}$

40 11.66 51.66

9. 50 शहरों में महिलाओं की साक्षरता दर निम्न बारम्बारता बंटन में दर्शाई गई है

साक्षरता दर (% में)	शहरों की संख्या
20-30	3
30-40	2
40-50	6
50-60	15
60-70	8
70-80	7
80-90	5
90-100	4

उपरोक्त आँकड़ों का माध्यक ज्ञात कीजिए।

हल प्रश्न 7 की भाँति स्वयं हल करें।

10. निम्नलिखित आँकड़ों का माध्यक ज्ञात कीजिए।

ऊँचाई (सेमी) से कम	120	140	160	180	200
विद्यार्थियों की संख्या	12	26	34	40	50

हल

ऊँचाई	विद्यार्थियों की संख्या संचयी बारम्बारता	विद्यार्थियों की संख्या बारम्बारता
120 से कम	12	12
120-140	26	14
140-160	34	8
160-180	40	6
180-200	50	10
		N 50

यहाँ, N 50 (सम संख्या)

माध्यक वर्ग के लिए, $\frac{N}{2} = \frac{50}{2} = 25$

[जो संचयी बारम्बारता 26 के अन्तर्गत आता है]

माध्यक वर्ग 120-140 है।

अब, $L = 120, f = 14, cf = 12, f = 20$

$$\text{माध्यक } L \frac{\frac{N}{2} cf}{f} h$$

$$120 \frac{\frac{50}{2} 12}{14} 20$$

$$120 \frac{13 20}{14}$$

$$120 18.57 138.57$$

11. निम्नलिखित आँकड़ों का माध्यक परिकलित कीजिए।

अंक	विद्यार्थियों की संख्या
150 से ऊपर या बराबर	0
140 से ऊपर या बराबर	12
130 से ऊपर या बराबर	27
120 से ऊपर या बराबर	60
110 से ऊपर या बराबर	105
100 से ऊपर या बराबर	124
90 से ऊपर या बराबर	141
80 से ऊपर या बराबर	150

हल प्रश्न 10 की भाँति स्वयं हल करें।

12. यदि निम्नलिखित बारम्बारता बंटन का माध्यक 24 है, तब लुप्त बारम्बारता x का मान ज्ञात कीजिए।

आयु (वर्षों में)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
व्यक्तियों की संख्या	5	25	x	18	7

हल

आयु (वर्षों में)	व्यक्तियों की संख्या	संचयी बारम्बारता
0-10	5	5
10-20	25	30
20-30	x	$30 x$
30-40	18	$48 x$
40-50	7	$55 x$
	$N = 55 x$	

प्रश्नानुसार, माध्यक 24, जो वर्ग 20-30 के अन्तर्गत आता है।

$L = 20, f = x, N = 55 x, cf = 30, h = 10$

अब, $\text{माध्यक } L \frac{\frac{N}{2} cf}{f} h$

$$24 20 \frac{\frac{55 x}{2} 30}{x} 10$$

$$24 20 \frac{(55 x 60) 10}{2x}$$

$$4x 5x 25 x 25$$

13. यदि निम्नलिखित बारम्बारता बंटन का माध्यक 35 है, तब x का मान ज्ञात कीजिए।

वर्ग अंतराल	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
व्यक्तियों की संख्या	2	3	x	6	5	3	2

हल प्रश्न 12 की भाँति स्वयं हल करें।

14. निम्न बारम्बारता बंटन में यदि बारम्बारताओं का योग 58 है तथा माध्यक 28.5 है, तो x और y के मान ज्ञात कीजिए।

वर्ग	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
बारम्बारता	2	x	20	15	7	y

हल

वर्ग	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता
0-10	2	2
10-20	x	$2 + x$
20-30	20	$22 + x$
30-40	15	$37 + x$
40-50	7	$44 + x$
50-60	y	$44 + x + y$
	$N = 44 x y$	

प्रश्नानुसार, $N = 44 x y = 58$

$$x y = 14 \quad \ldots(i)$$

तथा माध्यक 28.5, जो वर्ग 20-30 के अन्तर्गत आता है।

$$L = 20, f = 20, cf = 2 x, h = 10$$

अब, $\text{माध्यक } L \frac{\frac{N}{2} cf}{f} h$

$$28.5 20 \frac{\frac{58}{2} 2 x}{20} 10$$

$$28.5 20 \frac{29 2 x}{20} 10$$

$$8.5 \frac{27 x}{2} 17 27 x$$

x 27 17 10

समी (i) से, y 14 10 4

अत: x 10 तथा y 4 है।

15. यदि निम्न आँकड़ों में, विद्यार्थियों के IQ का माध्यक 135 है, तो 220 विद्यार्थियों के IQ के निम्न बंटन में लुप्त बारम्बारताएँ f_1 और f_2 ज्ञात कीजिए।

आई क्यू (IQ)	100-110	110-120	120-130	130-140	140-150	150-160	160-170	170-180
विद्यार्थियों की संख्या	15	35	f_1	f_2	33	23	19	8

हल प्रश्न 14 की भाँति स्वयं हल करें।

16. निम्नलिखित आँकड़ों का माध्यक ज्ञात कीजिए।

अंक	विद्यार्थियों की संख्या
0 तथा अधिक	80
10 तथा अधिक	77
20 तथा अधिक	72
30 तथा अधिक	65
40 तथा अधिक	55
50 तथा अधिक	43
60 तथा अधिक	28
70 तथा अधिक	16
80 तथा अधिक	10
90 तथा अधिक	8
100 तथा अधिक	0

हल प्रश्न 10 की भाँति स्वयं हल करें।

17. आँकड़ों का माध्य तथा माध्यिका क्रमश: 24 तथा 26 है। बहुलक का मान ज्ञात करें।

हल दिया है, माध्यिका 26, माध्य 24

बहुलक 3 (माध्यिका) 2 (माध्य)

3(26) 2(24) 78 48 30

18. यदि आँकड़ों का बहुलक तथा माध्य क्रमश: $12k$ तथा $15k$ है तब आँकड़ों का माध्यक ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, बहुलक $12k$, माध्य $15k$

$$\text{माध्यक} \quad \frac{\text{बहुलक} \quad 2(\text{माध्य})}{3}$$

$$\frac{12k \quad 2(15k)}{3} \quad \frac{42k}{3} \quad 14k$$

19. स्कूल के 200 विद्यार्थियों की मेडिकल जाँच के दौरान उनका वजन निम्न पाया गया।

वजन (किग्रा में)	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80-89
विद्यार्थियों की संख्या	5	22	63	74	30	6

विद्यार्थियों के वजन का माध्यक ज्ञात कीजिए।

हल

वजन (किग्रा में)	सतत् वर्ग	विद्यार्थियों की संख्या	संचयी बारम्बारता
30-39	29.5 - 39.5	5	5
40-49	39.5 - 49.5	22	27
50-59	49.5 - 59.5	63	90
60-69	59.5 - 69.5	74	164
70-79	69.5-79.5	30	194
80-89	79.5-89.5	6	200
		N 200	

माध्यक वर्ग के लिए, $\frac{N}{2} \quad \frac{200}{2} \quad 100$

[जो संचयी बारम्बारता 164 के अन्तर्गत आता है]

माध्यक वर्ग 59.5 - 69.5 है।

L 59.5, f 74, h 10, cf 90

$$\text{माध्यक} \quad L \quad \frac{\frac{N}{2} \quad cf}{f} \quad h$$

$$59.5 \quad \frac{\frac{200}{2} \quad 90}{74} \quad 10$$

$$59.5 \quad \frac{10 \quad 10}{74} \quad 59.5 \quad 1.35$$

60.85 किग्रा

❐❐❐